Bloque 12. Tema 6.

Probabilidad.

ÍNDICE

1) INTRODUCCIÓN

La **definición de probabilidad** se produjo debido al deseo del ser humano por conocer con certeza los eventos que sucederán en el futuro, por eso a través de la historia se han desarrollado diferentes enfoques para tener un concepto de la probabilidad y determinar sus valores. Por eso su estudio está vinculado a los juegos de azar.

Actualmente la probabilidad se utiliza en muchas disciplinas unidas a la Estadística: predicción de riesgos en seguros, estudios sobre la calidad de procesos industriales, etc.

Las posibles dificultades de la unidad son más de tipo conceptual que de procedimientos, ya que los cálculos numéricos son muy sencillos.

Se debe incidir en la correcta comprensión y aplicación de los conceptos de la unidad: experimento aleatorio o determinista, espacio muestral, suceso, operaciones con sucesos, probabilidad, regla de Laplace y diagrama de árbol.

Vídeo nº1: Descifrar las probabilidades en la vida.Fuente: Youtube

https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=p_SWxgyeb-s

2) CONCEPTOS ELEMENTALES EN PROBABILIDAD

Llegados a este punto tenemos que definir los **conceptos fundamentales** que van a establecer las bases de este tema. Por ejemplo, ¿se trata del mismo experimento cuando lanzamos un dado, que cuando volcamos un vaso lleno de agua? ¿Cómo repercute en nuestros cálculos que un suceso sea compatible o incompatible? ¿se trata de la misma probabilidad cuando realizamos el experimento de lanzar un dado o que dos?

La respuesta a todas estas preguntas es no por eso debemos definir todos estos sucesos para posteriormente estudiar cómo repercuten en nuestros cálculos.

Vídeo nº2: Probabilidad poco intuitiva. Fuente: Youtube

https://www.youtube.com/watch?v=_mbO-ndr740

2.1) EXPERIMENTOS DETERMINISTAS

Un **experimento determinista** es aquel que, una vez estudiado, podemos predecir, es decir, que **sabemos lo que sucederá antes de que ocurra**. Algunos ejemplos:

- Si tiramos una piedra al aire esta caerá.
- Si un coche que va a 100 km/h tarda en hacer un trayecto de 1 hora, tenemos la certeza de que ha recorrido 100 km.
- Si ponemos agua en el congelador sabemos que se congelará a 0º C.

Imagen 1: Cubitos de hielo. Fuente:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9e/Ice_cubes_openphoto.jpg
Autor: Darren Hester. Licencia: Creative Commons (CC)

Ejercicio 1

Escribe algunos ejemplos de experimentos deterministas.

2.2) EXPERIMENTO ALEATORIO

Un experimento aleatorio es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, no se conoce el resultado que se va a obtener.

Por ejemplo:

- Si lanzamos una moneda no sabemos si saldrá cara o cruz.
- Cuando sacamos una bola de una caja que contiene bolas de diferentes colores, no podemos predecir el color que obtendremos.
- Si lanzamos un dado, no podemos predecir el número que saldrá.

Imagen 2: Dados en equilibrio.
Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/Dados.jpg
Autor: Matiastosini. Licencia: Creative Commons (CC)

El concepto de probabilidad se encuentra con frecuencia en la comunicación entre las personas. Por ejemplo:

1) Juan y Antonia tienen un 60% de probabilidades de casarse.
2) Los alumnos de bachillerato tienen un 90% de probabilidades de ingresar a la universidad.

En los ejemplos, se da la “medida” de que suceda realmente un evento que es incierto (casarse o ingresar a la universidad), y ésta se expresa mediante un número entre 0 y 1, o en porcentaje.

Intuitivamente podemos observar que cuanto más probable es que ocurra el evento, su probabilidad estará más próxima a “1” o al 100%, y cuando menos probable, más se aproximará a “0”.

De aquí se deduce que un hecho o evento que NO puede ocurrir tendrá probabilidad cero y uno cuya probabilidad es segura tendrá probabilidad uno.

Luego, si A representa un evento o suceso, se cumple que: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

Ejercicio 2

Lee el párrafo que aparece abajo y completa las palabras que faltan:

Lanzar un dado es un experimento _________________

El resultado de dividir 10 entre 2 es un experimento _________________

Lanzar una moneda al aire es un experimento _________________

Sacar una carta de una baraja española es un experimento _________________

Saber el resultado de elevar un número al cuadrado es un experimento _________________

Conocer el tiempo que hará mañana se trata de un experimento _________________

Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 verdes es un experimento _________________

2.3) ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral (E) Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento. Se representa con la letra E.

Ejemplo 1: **Al lanzar un dado de seis caras**, el espacio muestral es

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ejemplo 2: ¿Cuántos elementos tiene el Espacio Muestral si se lanza una moneda y un dado de seis caras?

Usamos el principio multiplicativo: 2 • 6 = 12 elementos

En el lanzamiento de monedas, la cantidad de resultados posibles también se determina por el principio multiplicativo:

1 Moneda → 2 posibilidades E = {c, s}

2 Monedas → 2 x 2 = 4 posibilidades E = {(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)}.

3 Monedas → 2 x 2 x 2 = 8 posibilidades E = {(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (c,s,s), (s,c,c), (s,c,s), (s,s,c), (s,s,s)}

n monedas → 2 x 2 x 2 x 2…= 2n posibilidades

Cuando un objeto puede caer de a maneras distintas y se lanzan n objetos, el Espacio Muestral tiene a n elementos.

Ejemplo 3: Al lanzar tres dados de seis caras, el Espacio Muestral tiene = 216 elementos

Imagen 3: Lanzamiento de una moneda al aire.
Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/Pile_ou_face.png.
Autor: Ipipipourax. Licencia. Creative Commons (CC)

Ejercicio 3

¿Qué es el espacio muestral? ¿Por qué letra se representa?

Ejercicio 4

¿Cuál es el espacio muestral de un dado de 8 caras?

2.4) EVENTO O SUCESO

Un evento o Suceso corresponde a un subconjunto de un Espacio Muestral, asociado a un experimento aleatorio.

Cualquier suceso se representa con una letra mayúscula excepto la **E** que reservamos para definir el espacio muestral.

Ejemplo 1: En el lanzamiento de 2 monedas, el Espacio Muestral es E = {(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)} y tiene 4 elementos.

Un **suceso** es que salgan **dos caras**, es decir {(c,c)}, que **tiene 1 elemento.**

Imagen 4: Moneda suiza de diez centavos. Fuente: http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/MONEDA_CARA_Y_CRUZ.jpg.
Autor: Padawane Licencia: Dominio público.

Ejemplo 2: En el lanzamiento de un **dado** ¿Cuántos elementos tiene el Espacio Muestral y cuántos el suceso **"que salga un número par"**?

Espacio Muestral = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, 6 elementos. Suceso = {2, 4, 6}, **3 elementos**

Ejercicio 5

¿Qué es un suceso?

Ejercicio 6

En el experimento "lanzar un dado de 6 caras" escribe el espacio muestral y los sucesos A "múltiplo de 3" y B "menor que 3".

2.5) SUCESO ELEMENTAL

Un Suceso Elemental es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio, es decir, cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral.

Por ejemplo un suceso **elemental** del experimento "sacar una carta de la baraja española" sería:

A={sacar el 5 de copas}

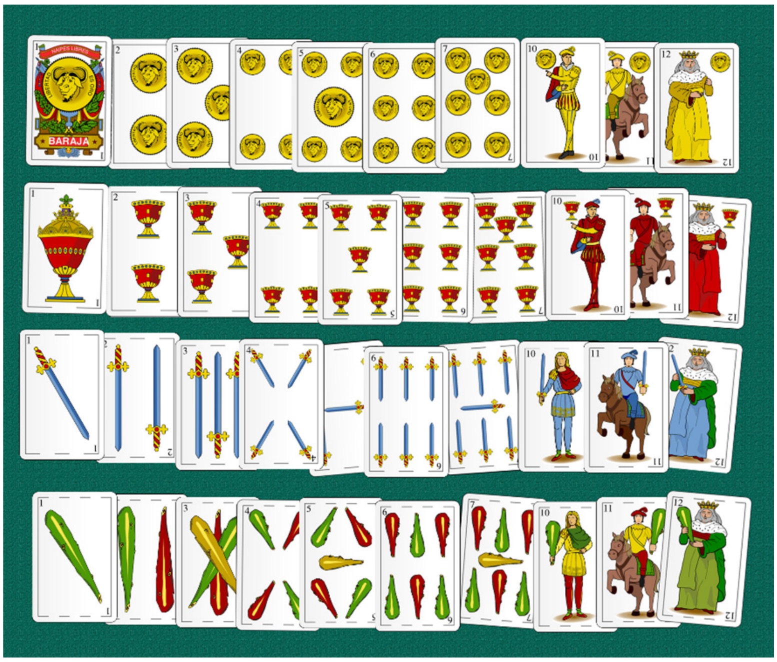


Imagen 5: Juego de cartas estilo español. Fuente: http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/baraja_espanola.png
Autor: Basquetteur. Licencia: Creative Commons (CC)

Ejercicio 7

Completa la tabla:

Experimento	Espacio muestral	Sucesos elementales
Lanzar una moneda		
Lanzar un dado		

2.6) SUCESO COMPUESTO

Un suceso compuesto es cualquier subconjunto del espacio muestral:

Al lanzar un dado se muestran **dos ejemplos** de sucesos compuestos:

- Salir par: A={2,4,6}

- Salir múltiplo de 2: B={2,4,6}

Imagen 6: Dados en forma de poliedro regular. Fuente: http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/muchos_dados.jpg
Autor: Peng. Licencia: Dominio público.

Ejercicio 8

Escribe 4 ejemplos de sucesos compuestos en el experimento "sacar cartas de una baraja española"

Ejercicio 9

En el experimento "lanzar un dado de 8 caras", cuatro sucesos compuestos serían:

2.7) SUCESO SEGURO

Imagen 7: Número 6. Fuente: Wikipedia.
Autor: Andreas Levers. Licencia: Creative Commons (CC)

Un suceso seguro está formado por todos los posibles resultados, es decir, por el espacio muestral por lo que ocurre siempre.

Ejemplo: al tirar un dado un dado: S={salir 6 o un número menor que 6}

Ejercicio 10

¿Qué es un suceso seguro?

Ejercicio 11

Inventa un ejemplo que sea suceso seguro.

2.8) SUCESO IMPOSIBLE

Un suceso imposible no puede ocurrir nunca. Se representa con el conjunto vacío Ø.

Ejemplo: al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7. A={7}

Ejercicio 12

	V / F
De una baraja española de 40 cartas un suceso seguro sería sacar picas	
En una bolsa con 5 bolas rojas y 3 negras un suceso seguro sería sacar una bola verde	
Si tenemos una caja con fichas numeradas del 1 al 4 un suceso seguro sería sacar una ficha con un número menor que 5	
Un suceso imposible sería si al lanzar 2 dados al aire y sumar la puntuación de sus caras obtener 0	
Al lanzar un dado al aire un suceso seguro sería salir un número mayor que 6	

2.9) SUCESOS COMPATIBLES

Dos sucesos, S y T, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

S= {salir par}={2,4,6} y T={salir menor que 4}={1,2,3}

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

Ejercicio 13

Escribe un ejemplo de suceso compatible.

2.10) SUCESOS INCOMPATIBLES

Dos sucesos, A y B, son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento en común, es decir, NO SE PUEDEN DAR A LA VEZ.

S= {salir par}={2,4,6} y T={salir múltiplo de 5}={1,5}

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

Ejercicio 14

Por ejemplo, en el experimento "sacar cartas de la baraja española" tenemos los sucesos:

A={salir oros}

B={salir copas}

Razona si los sucesos son compatibles o incompatibles

2.11) SUCESOS INDEPENDIENTES

Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Ejemplo: Al lazar dos dados los resultados son independientes.

Imagen 8: Ejemplo de dados. Fuente: http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/2_dados.jpg.
Autor: Roland Scheicher. Licencia: Dominio público

Ejercicio 15

Piensa un ejemplo de sucesos independientes.

2.12) SUCESOS DEPENDIENTES

Ejemplo: Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Ejemplo: Si extraemos dos cartas de una baraja y la primera es un rey condiciona a la extracción de la segunda carta, son por tanto sucesos dependientes.

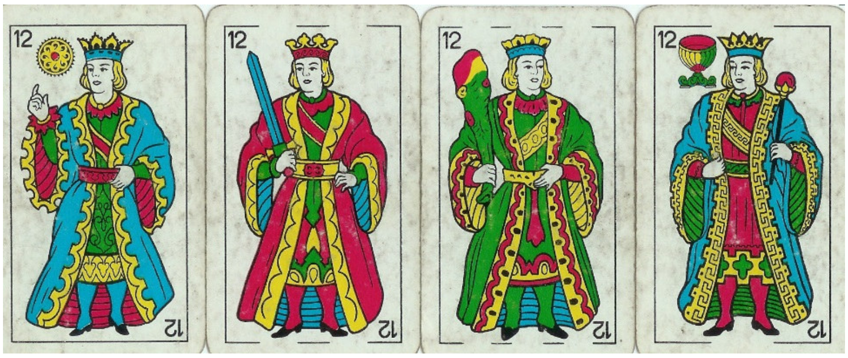


Imagen 9: Reyes de la baraja española.
Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fe/TuteFourKings.jpg.
Autor: GDuwen. Licencia: Creative Commons (CC)

Ejercicio 16

Un ejemplo de suceso dependiente sería...

2.13) SUCESO CONTRARIO

Un suceso Contrario: Ā o A' Es aquel que se verifica cuando no ocurre el suceso A.

Ejemplo 1: A={salir cara} Ā = {salir cruz}

Ejemplo 2: Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

Ejercicio 17

Escribe los sucesos contrarios en los siguientes casos:

A={1,2}

B={1,5}

C={2,5}

D={3,4,5,6}

2.14) EJEMPLOS

En los siguientes ejemplos utilizaremos una baraja española, es decir, una baraja de 40 cartas, para ilustrar los conceptos definidos en los apartados precedentes.

Ejemplo 1: Experimento: "sacar una carta de una baraja española";

En este caso el espacio muestral será: E = {las 40 cartas de la baraja}

- Suceso: "salir el as de bastos"

En este caso el suceso es elemental, ya que incluye a un único elemento del espacio muestral.

- Suceso A: "salir el as de oros o la sota de bastos"
- Suceso B: "salir un as"
- Suceso C: "salir una carta de copas"

Ahora los tres sucesos son compuestos, ya que todos constan de más de un elemento del espacio muestral.

Además los sucesos A y B son compatibles, ya que ambos pueden ocurrir a la vez si la carta extraída es el as de oros.

También los sucesos B y C son compatibles, ya que ocurrirán los dos si la carta que sale es el as de copas, sin embargo, los sucesos A y C son incompatibles, ya que no pueden suceder a la vez, sea cual sea la carta que salga.

El suceso contrario al suceso B será "no salir un as", y se denotará de la forma: B' = {no salir una carta de copas}.

- Suceso seguro es: Suceso seguro es: "cualquier carta"; y Suceso imposible es: "ninguna carta" "cualquier carta"; y Suceso imposible es: "ninguna carta", aunque en este caso podríamos poner como ejemplo cualquier resultado que no pudiera darse al extraer una carta de la baraja.

Ejemplo 2: Experimento: realizar una extracción de la baraja, anotar el resultado y volver a introducir la carta en la baraja, realizar entonces una segunda extracción y anotar el resultado. En este caso el espacio muestral está formado por parejas de cartas.

- Suceso A: "salir el as de bastos en la primera extracción"
- Suceso B: "salir el as de bastos en la segunda extracción"

Los sucesos A y B son independientes, ya que la carta que salga en la segunda extracción no depende del resultado obtenido en la primera, puesto que el resultado únicamente se anota y la carta vuelve a ponerse en el mazo.

Ejemplo 3: Experimento: realizar una extracción de la baraja, y a continuación realizar una segunda extracción y anotar el resultado de ambas. En este caso el espacio muestral está formado por parejas de cartas, pero notar que los dos elementos de la pareja deben ser distintos.

- Suceso A: "salir el as de bastos en la primera extracción"
- Suceso B: "salir el as de bastos en la segunda extracción"

Los sucesos son dependientes, ya que si ocurre A, es decir, sale el as de bastos en la primera extracción, no puede ocurrir el suceso B, porque esa carta no estaría en el mazo, mientras que si el suceso A no ocurre, entonces puede ocurrir B.

Ejercicio 18

De una baraja española de 40 cartas extraemos una carta, indica si en cada uno de los apartados siguientes aparecen sucesos compatibles o no:

a) A={Salir una figura} , B={Salir un oro} ________

b) A={Salir el as de bastos}, B={Salir el as de copas} ________

c) A={Salir una copa}, B={Salir el siete de copas} ________

Ejercicio 19

En el experimento de lanzar un dado y anotar su resultado, escribe el suceso contrario a:

A={Sacar un número par menor que 5}

B={1,2,6}

C={3}

Ejercicio 20

En una urna tenemos 3 bolas blancas y dos bolas rojas. Identifica la dependencia o independencia de sucesos en cada uno de los experimentos siguientes:

a) Experimento sin reemplazamiento: sacamos una bola, la dejamos fuera y sacamos otra. Sucesos: A={Roja en la primera extracción} B={Blanca en la segunda extracción}.

b) Experimento con reemplazamiento: sacamos una bola, anotamos su color, volvemos a meterla en la urna y sacamos otra.

Sucesos: A={Roja en la primera extracción}

B={Blanca en la segunda extracción}.

3) RELACIONES ENTRE SUCESOS

La unión de Sucesos: A U B es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B.

La intersección de Sucesos: A ∩ B es el suceso formado por los elementos que están simultáneamente en A y en B.

Ejemplo 1: lanzamos un dado tal que dos sucesos:

A={impar}={1,3,5}

B={primo}={2,3,5}

A U B={1,2,3,5}

Ejemplo 2: lanzamos un dado tal que dos sucesos:

A={par}={2, 4, 6}

B={primo}={2,3,5}

A ∩ B={2}

Ejercicio 21

Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Extraemos una bola.

a) **¿Cuál es el espacio muestral?**
b) **A=”obtener numero primo”, B=”múltiplo de 3”. Escribe los sucesos, A, B , A’, B’ , A ∩ B, AUB, AUA’ y A ∩ A’**

Ejercicio 22

Lanzamos dos veces una moneda:

a) **Escribe todos los sucesos elementales**
b) **Escribir el suceso S={la primera sale cara}**
c) **Escribir suceso incompatible con S**

4) PROBABILIDAD CLÁSICA. REGLA DE LAPLACE

En este apartado veremos cómo se asignan probabilidades a sucesos de ciertos experimentos, tener en cuenta que cuando se hace un experimento aleatorio se pueden dar **dos situaciones**:

- **Que conozcamos de antemano**, o a priori, **los resultados** que pueden darse: por ejemplo en el caso del lanzamiento de una moneda, experimento en el que sólo puede obtenerse cara o cruz. En estos casos se dice que la **asignación de probabilidades se realiza "a priori"**.
- **Que desconozcamos a priori los resultados** que pueden darse: por ejemplo, en el experimento "contar los coches que echan gasolina en una determinada estación de servicio de 9 a 10 de la mañana", evidentemente no sabemos de antemano cuantos valores pueden darse, ya que pueden ser tres coches, cuatro o treinta. Para asignar probabilidades en estos experimentos es preciso tomar muchos datos, diciéndose que la **asignación de probabilidades se realiza a posteriori**.

  En este nos referimos a la asignación de probabilidades "a priori", utilizando una regla que lleva el nombre del matemático francés Pierre Simon Laplace, así si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

Imagen 10: Pierre Simon Marquis de Laplace. Fuente: http://localhost:51235/ACT_04_Bloque_12_Tema_06_Contenidos_Rev_JF/resources/Laplace.jpg.
Autor: Guerin. Licencia: Dominio público.

$$P(A) = \frac{casos favorables}{casos posibles}$$

Ejemplo 1: Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras.

Por lo tanto:

Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}.

Consecuentemente:

Casos favorables: 1.

La solución será:

$$P(2caras) = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2: En una baraja de 40 cartas, hallar la P (as) y P (copas).

Casos posibles: 40.

Casos favorables de ases: 4.

$$P(as) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Casos favorables de copas: 10.

$$P(copas) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 3: Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

a) Un número par.

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Casos favorables: {2, 4, 6}.

$$P(par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

d) Mayor que 4.

Casos favorables: {5, 6}.

$$P(>4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 23

En una urna hay tres bolas rojas, dos verdes y cinco blancas. Se saca una bola anotando el color de la bola extraída. Determina la probabilidad de los sucesos: {Salir roja}, {Salir verde} y {Salir blanca}.

Ejercicio 24

De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta, determian la probabilidad de los sucesos A = {Salir una figura de copas}, B = {Salir un tres} y C ={Salir una sota}. Calcula también $P(B^c)$.

P(A) = ________________

P(B) = ________________

P(C) = ________________

$P(B^c)$ = ________________

4.1) PROBABILIDAD DEL SUCESO CONTRARIO

La probabilidad del suceso contrario es la probabilidad de que un suceso NO ocurra, o "probabilidad de un suceso contrario", se obtiene a través de:

$$P(A)=1-P(A')$$

Ejemplo: Si La probabilidad de que llueva es 2/5, ¿cuál es la probabilidad de que NO llueva?

Solución: P(no llueva) = 1 - P(llueva) = 1 – 2/5 = 3/5

Ejercicio 25

Calcula la **probabilidad del suceso contrario** en los siguientes casos:

Experimento "lanzar un dado de 6 caras":

Suceso	Probabilidad del suceso contrario
A={Sacar un número menor que 4}={1,2,3}	
B={Sacar un número impar}={1,3,5}	
C={{Sacar un múltiplo de 2}={2,4,6}	
D={Sacar un número mayor 6} = {0}	

Ejercicio 26

La probabilidad de un suceso es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?

4.2) PROBABILIDAD DEL SUCESO SEGURO

La probabilidad de un suceso seguro es si se tiene certeza absoluta de que un evento A ocurrirá: P(A) = 1

Ejemplo: Al lanzar un dado de 6 caras.

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6) Casos favorables: 6 (1,2,3,4,5,6)

P(A) = 6/6 = 1

Ejercicio 27

Inventa 2 ejemplos de un suceso seguro y calcula su probabilidad.

4.3) PROBABILIDAD DE UN SUCESO IMPOSIBLE

La probabilidad de un suceso imposible es si se tiene certeza absoluta de que un evento A **NO ocurrirá**: P(A) = 0

Ejemplo: La probabilidad de obtener un número mayor que 6 al lanzar un dado común es 0 (0 de 6).

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6) Casos favorables: 0

P(mayor que 6) = 0/6 = 0

Ejercicio 28

Inventa 2 sucesos imposibles y calcula su probabilidad.

5) PROPIEDADES BÁSICAS DEL CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD

En este epígrafe vamos a estudiar algunas de las **propiedades básicas del cálculo de la probabilidad** como son las propiedades de la **unión de sucesos** (distinguiendo los sucesos compatibles e incompatibles) y las propiedades de que ocurran A y B en **experimentos compuestos.**

5.1) PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS

Caso 1: La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles viene dada:

p(A ∪ B) = p(A) + p(B)

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Caso 2: La probabilidad de la unión de sucesos compatibles:

P (A∪ B) = P(A) + P(B) - P(A∩)

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 29

Lanzamos dos dados y sumamos sus resultados. Dados los sucesos A={salir más de 5}, B={salir un número par} y C={salir 2}, determina:

a) P(A)

b) P(B)

c) P(C)

d) P(A U B)

e) P(B U C)

f) P(A U C)

g) P(A U B U C)

Ejercicio 30

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par?

5.2) Probabilidad de que ocurra el suceso A y el B en experiencias compuestas

Caso 1: Cuando A y B son eventos independientes: (si la probabilidad de que ocurra el proceso B no depende de que haya ocurrido o no antes A.), se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo**:**

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado se obtengan dos números pares?

Solución:

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6) Casos favorables: 3 (2,4,6) Entonces: P(dos pares) = P(par) y P(par) = P(par) • P(par) = 3/6 • 3/6 = 9/36 = 1/4

Caso 2: Cuando A y B son eventos dependientes corresponde la **Probabilidad Condicionada.**

Sea un experimento aleatorio en el que hay dos sucesos A y B. Se llama probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A, y se denota como **P(B/A)** a la probabilidad de que ocurra el suceso B sabiendo que es también A viene dado por **P(B/A)** y cuya fórmula es:

$$\frac{P(A(\cap)B)}{P(A)}$$

Ejemplo**:**

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 4 sabiendo que ha salido par?

B = {Sacar 4} = {**4**}

A = {Número par} = {2,**4**,6}

P(B/A) = 1/3

$$\frac{145}{334} \div \frac{196}{334}$$

Ejercicio 31

La encuesta sobre el agrado del fútbol en la TV según los sexos entre alumnos de 14-18 años es la siguiente:

	A = Varones	**A' = Mujeres**	
B = agrada el fútbol	145	42	187
B' = no agrada el fútbol	51	96	147
	196	138	334

Considerar los sucesos:

A = Ser varón

A' = Ser mujer

B = Le gusta el fútbol

B' = no le gusta el fútbol

Calcula:

- Probabilidad de que siendo varón(A) le guste el futbol(B) p(B/A)=
- Probabilidad que siendo varón(A) no le guste el futbol(B’) p(B’/A)=
- Probabilidad de que siendo mujer(A’) le guste el futbol(B) p(B/A’)=
- Probabilidad de que siendo mujer(A’) no guste futbol(B’) p(A’/B’)=
- Probabilidad de que gustándole el futbol(B) sea varón(A) p(A/B)=
- Probabilidad de que gustándole el futbol(B) sea mujer(A’) p(A’/B)=

<u>Ejercicio 32</u>

En lugar de utilizar las tablas de contingencia del problema anterior utiliza la fórmula:

$$\frac{P(A(\cap)B)}{P(A)}$$

Para calcular el problema anterior y comprueba que los resultados son los mismos

<u>Ejercicio 33</u>

Extraemos una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de que la carta sea rey de oros, sabiendo que la carta extraída es una figura.

6) PROBABILIDAD COMPUESTA CON REPOSICIÓN Y SIN REPOSICIÓN

Hasta ahora sólo hemos trabajado el cálculo de la probabilidad con experiencias simples, es decir, sacando sólo una carta de la baraja, sacando una bola de una urna o lanzando un dado al aire. Ahora vamos a estudiar la probabilidad en **EXPERIENCIAS COMPUESTAS**. Ejemplos de ellas sería lanzar dos veces un dado o sacar tres cartas de una baraja.

Ahora bien, esto lo podemos hacer de dos maneras diferenciadas: **CON REPOSICIÓN Y SIN REPOSICIÓN**. Veámoslo.

PROBABILIDAD CON REPOSICIÓN:

Cuando extraemos una carta y miramos el palo, y la volvemos a introducir, estamos en una situación de **REPOSICIÓN**. Y si después extraemos otra carta y la volvemos a mirar, podremos calcular, por ejemplo, la probabilidad de que ambas sean copas. Está claro que son sucesos independientes, ya que al volver a introducir la carta el palo de la segunda extracción no depende del palo de la primera.

Ejemplo:

Se tiene una bolsa con 30 pelotitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 pelotitas al azar, con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Solución:

Primera extracción	Segunda extracción (Con reposición)
Casos posibles: 30	Casos posibles: 30
Casos favorables: 12	Casos favorables: 12

Entonces:

$$
\begin{aligned}
P(\text{dos blancas}) &= P(\text{blanca}) \text{ y } P(\text{blanca}) \\
&= P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca}) \\
&= \frac{12}{30} \cdot \frac{12}{30} = \frac{144}{900} = \frac{4}{25}
\end{aligned}
$$

PROBABILIDAD SIN REPOSICIÓN:

Cuando extraemos una carta y miramos el palo, y **NO** la volvemos a introducir, estamos en una situación **SIN REPOSICIÓN**. Y si después extraemos otra carta y la volvemos a mirar, podremos calcular, por ejemplo, la probabilidad de que ambas sean copas. Está claro que son sucesos dependientes, ya que al no volver a introducir la carta el palo de la segunda extracción depende del palo de la primera.

Ejemplo:

Se tiene una bolsa con 30 pelotitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 pelotitas al azar, sin reposición, ¿cuál es la

Solución:

Primera extracción

Casos posibles: 30

Casos favorables: 12

Segunda extracción (Sin reposición)

Casos posibles: 29

Casos favorables: 11

Entonces:

$$\begin{aligned} P(\text{dos blancas}) &= P(\text{blanca}) \text{ y } P(\text{blanca}) \\ &= P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca}) \\ &= \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{132}{870} = \frac{22}{145} \end{aligned}$$

7) DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Hay que tener en cuenta: que la **suma de probabilidades** de las **ramas** de cada **nudo** ha de dar **1**.

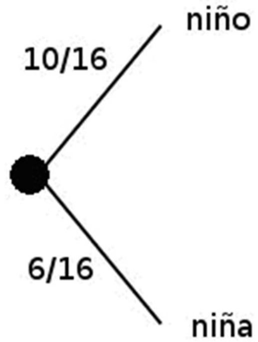
Ejemplos

Una clase consta de 6 niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

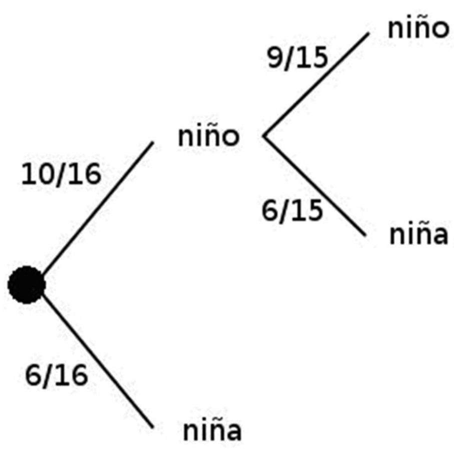
1) Seleccionar tres niños.
2) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.
3) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.
4) Seleccionar tres niñas.

Solución: para obtener las probabilidades pedidas, utilizaremos un diagrama de árbol etiquetado con probabilidades. Lo construiremos paso a paso:

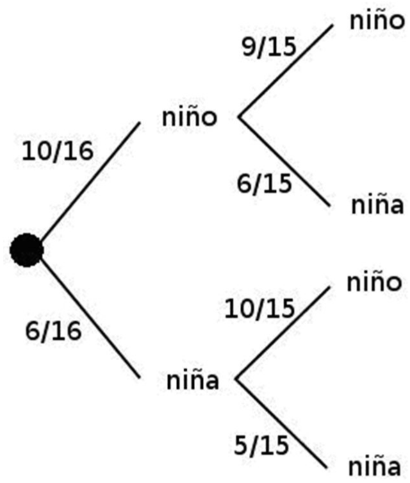
- En primer lugar anotamos la probabilidad de que al escoger por primera vez la elección sea un niño o una niña, siendo, según la Regla de **Laplace** 10/16 la probabilidad de elegir un niño y 6/16 la de que sea niña, escribiendo en forma de diagrama será:

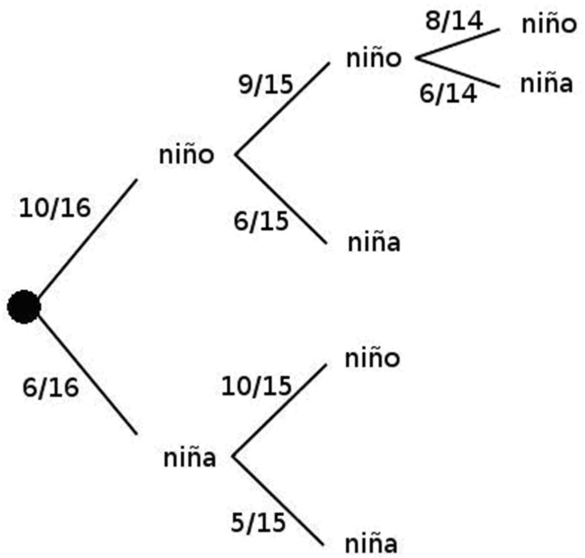


- Ahora la situación es distinta en función de la elección que se ha hecho en primer lugar, puesto que en el caso de haber elegido niño en la primera selección, quedarán 15 alumnos, de los que 9 serán niños y 6 niñas, las probabilidades en forma de diagrama se escribirán entonces así:



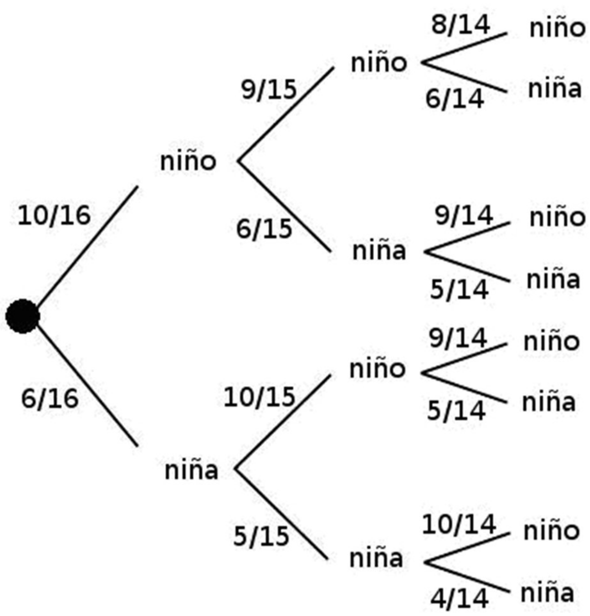
- Sin embargo, si en la primera elección se eligió niña, la situación será que hay 15 alumnos, de los que 10 serán niños y 5 niñas, por lo que las probabilidades para la segunda elección al azar serán diferentes. Así completamos el diagrama con las opciones que faltan para la segunda elección.





- Llegamos así a cuatro posibles situaciones diferentes para realizar la tercera elección, supongamos que la secuencia de elecciones ha sido niño-niño, es decir, estamos en la hoja superior del diagrama de árbol que estamos construyendo, la situación será que hay 14 alumnos de los que 8 son niños y 6 niñas, el árbol se completa como vemos:

- Razonando del mismo modo en las hojas restantes podemos completar el diagrama de árbol que nos ayudará a resolver a las cuestiones planteadas en este ejercicio, y que queda así:



Podemos ahora contestar a los diferentes apartados:

1) Seleccionar tres niños.

   p(3 niños) $=\frac{10}{16}*\frac{9}{15}*\frac{8}{14}=0{,}214$

2) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.

   p (2 niños y 1 niña) = $\frac{10}{16}*\frac{9}{15}*\frac{6}{14}+\frac{10}{16}*\frac{6}{15}*\frac{9}{14}+\frac{6}{16}*\frac{10}{15}*\frac{9}{14}=0{,}482$

3) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

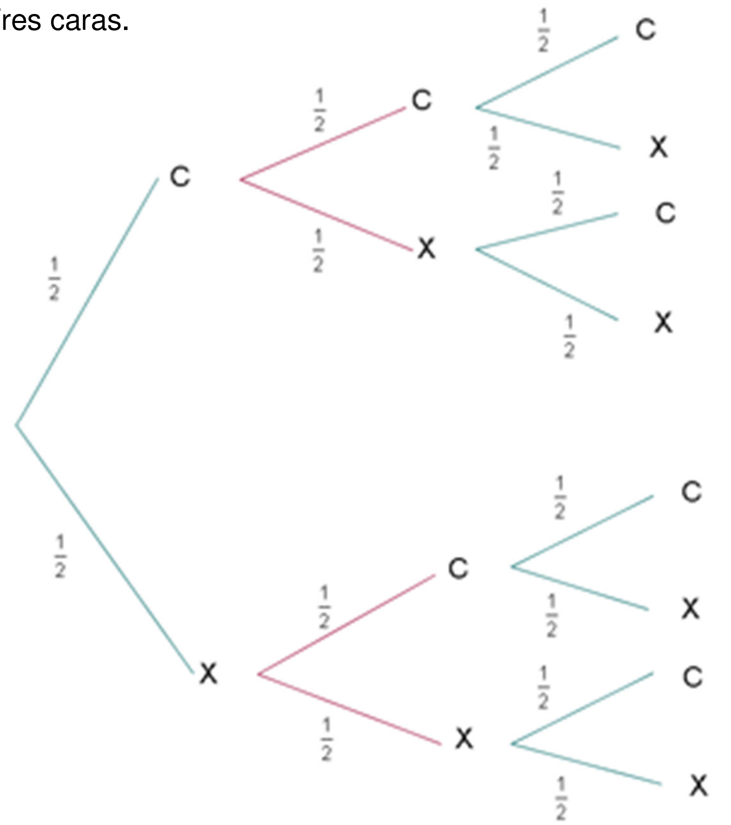
   p (2 niñas y 1 niño) = $\frac{10}{16}*\frac{6}{15}*\frac{5}{14}+\frac{6}{16}*\frac{10}{15}*\frac{5}{14}+\frac{6}{16}*\frac{5}{15}*\frac{10}{14}=0{,}268$

4) Seleccionar tres niñas.

   p (3 niñas) = $\frac{6}{16}*\frac{5}{15}*\frac{4}{14}=0{,}0357$

Calcular la probabilidad de que al arrojar al aire tres monedas, salgan:

Tres caras.



p(3c) = $\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

Ejercicio 34

En una urna hay dos bolas rojas y tres verdes. Se realizan tres extracciones sin reemplazamiento (sin meter la bola que se saca). Realiza el desarrollo del correspondiente diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que salgan dos rojas y una verde.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Escribe algunos ejemplos de experimentos deterministas.

- El sol sale por el Este y se pone por el Oeste.
- El agua hierve a 100º C.
- Si tiro con fuerza un vaso de vidrio al suelo se romperá.

Ejercicio 2

Lee el párrafo que aparece abajo y completa las palabras que faltan:

Lanzar un dado es un experimento **aleatorio**.

El resultado de dividir 10 entre 2 es un experimento **determinista**.

Lanzar una moneda al aire es un experimento **aleatorio**.

Sacar una carta de una baraja española es un experimento **aleatorio**.

Saber el resultado de elevar un número al cuadrado es un experimento **determinista**.

Conocer el tiempo que hará mañana se trata de un experimento **aleatorio**.

Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 verdes es un experimento **aleatorio**.

Ejercicio 3

¿Qué es el espacio muestral? ¿Por qué letra se representa?

Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento. Se representa con la letra E

Ejercicio 4

¿Cuál es el espacio muestral de un dado de 8 caras?

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Ejercicio 5

¿Qué es un suceso?

Un evento o Suceso corresponde a un subconjunto de un Espacio Muestral, asociado a un experimento aleatorio.

Ejercicio 6

En el experimento "lanzar un dado de 6 caras" escribe el espacio muestral y los sucesos A "múltiplo de 3" y B "menor que 3".

El espacio muestral viene dado: E ={1,2,3,4,5,6}

El suceso A: A={3,6}

El suceso B: B={1,2}

Ejercicio 7

Completa la tabla:

Experimento	Espacio muestral	Sucesos elementales
Lanzar una moneda	E={cara, cruz}	cara (C) y cruz (X)
Lanzar un dado	E={1,2,3,4,5 y 6}	1,2,3,4,5,6

Ejercicio 8

Escribe 4 ejemplos de sucesos compuestos en el experimento "sacar cartas de una baraja española"

A={salir ases}

B={salir copas}

C={salir figuras}

D={salir Reyes}

Ejercicio 9

En el experimento "lanzar un dado de 8 caras", cuatro sucesos compuestos serían:

A={Salir número impar}

B={Salir múltiplo de 2}

C={salir menor que 6}

D={salir mayor 4}

Ejercicio 10

¿Qué es un suceso seguro?

Un suceso seguro está formado por todos los posibles resultados, es decir, por el espacio muestral por lo que ocurre siempre

Ejercicio 11

Inventa un ejemplo que sea suceso seguro.

Al sacar una bola de una caja que sólo contiene bolas azules un suceso seguro sería sacar una bola azul.

Otro ejemplo sería al lanzar u.

Ejercicio 12

	V / F
De una baraja española de 40 cartas un suceso seguro sería sacar picas	**F**
En una bolsa con 5 bolas rojas y 3 negras un suceso seguro sería sacar una bola verde	**F**
Si tenemos una caja con fichas numeradas del 1 al 4 un suceso seguro sería sacar una ficha con un número menor que 5	**V**
Un suceso imposible sería si al lanzar 2 dados al aire y sumar la puntuación de sus caras obtener 0	**V**
Al lanzar un dado al aire un suceso seguro sería salir un número mayor que 6	**F**

Ejercicio 13

Escribe un ejemplo de suceso compatible:

Por ejemplo en el experimento "sacar cartas de la baraja española" tenemos los sucesos:

A={salir oros}

B={salir figura}

Ambos sucesos serían compatibles porque tienen 3 cartas en común: sota, caballo y rey de oros

Ejercicio 14

Por ejemplo, en el experimento "sacar cartas de la baraja española" tenemos los sucesos:

A={salir oros}

B={salir copas}

Razona si los sucesos son compatibles o incompatibles

Ambos sucesos no se pueden dar al mismo tiempo. Si saco una carta que sea del palo "oros" no es compatible con sacar una carta que sea del palo "copas".

Ejercicio 15

Piensa un ejemplo de sucesos independientes.

Extraer dos cartas de una baraja, con reposición, son sucesos independientes.

Ejercicio 16

Un ejemplo de suceso dependiente sería...

Por ejemplo si tenemos una bolsa con calcetines y pañuelos un suceso dependiente sería ir sacando prendas de la bolsa sin reposición.

Ejercicio 17

Escribe los sucesos contrarios en los siguientes casos:

A={1,2}

B={1,5}

C={2,5}

D={3,4,5,6}

En el experimento lanzar un dado de 8 caras los sucesos contrarios serían:

A={1,2} A'={3,4,5,6}

B={1,5} B'={2,3,4,6}

C={2,5} C'={1,3,4,5,6}

D={3,4,5,6} D'={1,2}

Ejercicio 18

De una baraja española de 40 cartas extraemos una carta, indica si en cada uno de los apartados siguientes aparecen sucesos compatibles o no:

a) A={Salir una figura} , B={Salir un oro} __SI___

b) A={Salir el as de bastos}, B={Salir el as de copas} __NO__

c) A={Salir una copa}, B={Salir el siete de copas} __SI___

Ejercicio 19

En el experimento de lanzar un dado y anotar su resultado, escribe el suceso contrario a: A={Sacar un número par menor que 5}; B={1,2,6}; C={3}

A = {1,3,5,6}

B = {3,4,5}

C = {1,2,4,5,6}

Ejercicio 20

Solución

a) La probabilidad de que B ocurra depende de si A ha ocurrido o no, ya que si A ocurre, es más fácil que ocurra B en la segunda que si A no ha ocurrido.

b) En este caso B no depende de A, porque tanto si A ocurre como si no, la urna tiene la misma configuración en la segunda extracción.

Ejercicio 21

Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Extraemos una bola.

a) **¿Cuál es el espacio muestral?**

b) **A=”obtener numero primo”, B=”múltiplo de 3”. Escribe los sucesos, A, B , A’, B’ , A ∩ B, AUB, AUA’ y A ∩ A’**

a) E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

b) A={2,3,5,7}; B={3,6,9}; A’={1,4,6,8,9,10}, B’={1,2,4,5,7,8,10}, AUB={2,3,5,6,7,9}, A ∩ B={3}, AUA=E, A ∩ A’=∅

Ejercicio 22

Lanzamos dos veces una moneda:

a) **Escribe todos los sucesos elementales**
b) **Escribir el suceso S={la primera sale cara}**
c) **Escribir suceso incompatible con S**

a) Podemos entender el experimento de dos formas

1) Ver el número de caras E={0 caras, 1 cara, 2caras}. No son equiprobables
2) Distintas situaciones (importa el orden). E={cc,cx,xc,xx}. Son equiprobables: un espacio muestral es equiprobable si todos los elementos que lo conforman tienen igual oportunidad de ser elegidos y, en consecuencia, tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

b) S={cx,cc}

c) A={salen dos caras}={cc}

Ejercicio 23

En una urna hay tres bolas rojas, dos verdes y cinco blancas. Se saca una bola anotando el color de la bola extraída. Determina la probabilidad de los sucesos: {Salir roja}, {Salir verde} y {Salir blanca}.

$$P(Salir_r oja)=\frac{3}{10}$$

$$P(Salir_v erde)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$P(Salir_b lanca)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 24

De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta, determian la probabilidad de los sucesos A = {Salir una figura de copas}, B = {Salir un tres} y C ={Salir una sota}. Calcula también $P(B^c)$.

P(A) = 0.075

P(B) = 0.1

P(C) = 0.1

$P(B^c)$ = 0.9

Ejercicio 25

Calcula la **probabilidad del suceso contrario** en los siguientes casos:

Experimento "lanzar un dado de 6 caras":

Suceso	Probabilidad del suceso contrario
A={Sacar un número menor que 4}={1,2,3}	P(A)=1- (3/6) = 3/6
B={Sacar un número impar}={1,3,5}	P(B)=1- (3/6) = 3/6
C={{Sacar un múltiplo de 2}={2,4,6}	P(C)= 1- (3/6) = 3/6
D={Sacar un número mayor 6} = {0}	P(D) = 1 -(0/6) = 1

Ejercicio 26

La probabilidad de un suceso es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?

P(A') 1- 0,3 =0,7

Ejercicio 27

Inventa 2 ejemplos de un suceso seguro y calcula su probabilidad.

Ejemplo 1: Sacar una bola roja dentro de una caja dónde sólo tenemos bolas rojas.

P(A)=1

Ejemplo 2: Sacar un número menor de 7 cuando lanzo un dado de 6 caras.

P(B) = 1

Ejercicio 28

Inventa 2 sucesos imposibles y calcula su probabilidad.

Ejemplo 1: Sacar un pañuelo rojo dentro de una caja done sólo hay calcetines.

P(A) = 0

Ejemplo 2: Sacar una carta de picas de una baraja española.

P(B) = 0

Ejercicio 29

Lanzamos dos dados y sumamos sus resultados. Dados los sucesos A={salir más de 5}, B={salir un número par} y C={salir 2}, determina:

a) P(A) $\frac{26}{36}=0{,}72$

b) P(B) $\frac{18}{36}=0{,}5$

c) P(C) $\frac{1}{36}=0{,}027$

d) P(A U B) $\frac{26}{36}+\frac{18}{36}-\frac{14}{36}=\frac{30}{36}=0{,}83$

e) P(B U C) $\frac{18}{36}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}=0{,}5$

f) P(A U C) $\frac{26}{36}+\frac{1}{36}=\frac{27}{36}=0{,}75$

g) P(A U B U C) $\frac{26}{36}+\frac{18}{36}+\frac{1}{36}-\frac{14}{36}-\frac{1}{36}=0{,}83$

Ejercicio 30

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par?

Casos posibles 6 {1,2,3,4,5,6}

Casos favorables (menor que 5): 4 {1,2,3,4} P (menor que 5) = 4/6

Casos favorables (número par): 3 {2,4,6} P (número par) = 3/6

Como 2 y 4 son menores que 5, y al mismo tiempo son pares, se estarían considerando como casos favorables dos veces.

Por lo tanto, la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par, al lanzar un dado se expresa como:

P (< 5) ó P(par) = P(<5) U P(par) – P(<5 ∩par)= P(< 5) + P(par) – P(<5 y par)= 4/6 + 3/6 – 2/6 = 5/6

Ejercicio 31

- Probabilidad de que siendo varón(A) le guste el fútbol(B) p(B/A)= 145/196
- Probabilidad que siendo varón(A) no le guste el fútbol(B') p(B'/A)= 51/196
- Probabilidad de que siendo mujer(A') le guste el fútbol(B) p(B/A')=42/138
- Probabilidad de que siendo mujer(A') no guste fútbol(B') p(A'/B')= 96/138
- Probabilidad de que gustándole el fútbol(B) sea varón(A) p(A/B)= 145/187
- Probabilidad de que gustándole el fútbol(B) sea mujer(A') p(A'/B)= 42/187

Ejercicio 32

- Probabilidad de que siendo varón(A) le guste el fútbol(B) p(B/A)= 145/196
- Probabilidad que siendo varón(A) no le guste el fútbol(B') p(B'/A)= 51/196
- Probabilidad de que siendo mujer(A') le guste el fútbol(B) p(B/A')=42/138
- Probabilidad de que siendo mujer(A') no guste fútbol(B') p(A'/B')= 96/138
- Probabilidad de que gustándole el fútbol(B) sea varón(A) p(A/B)= 145/187
- Probabilidad de que gustándole el fútbol(B) sea mujer(A') p(A'/B)= 42/187

Ejercicio 33

Extraemos una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de que la carta sea rey de oros, sabiendo que la carta extraída es una figura.

1/12

Ejercicio 34

En una urna hay dos bolas rojas y tres verdes. Se realizan tres extracciones sin reemplazamiento (sin meter la bola que se saca). Realiza el desarrollo del correspondiente diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que salgan dos rojas y una verde.

P({dos rojas y una verde})= $\frac{2}{3}*\frac{1}{4}*1+\frac{2}{5}*\frac{3}{4}*\frac{1}{3}+\frac{3}{5}*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}=0{,}36$