Bloque 11. Tema 3.

Trigonometría

ÍNDICE

1) ¿Qué es la trigonometría?

Etimológicamente **trigonometría** significa medición de triángulos. Su objetivo es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de los lados de un triángulo con las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

Los primeros escritos relacionados con ella que aparecen en la historia se remontan a la época babilónica de la que se conservan unas tablillas con mediciones de lados y ángulos de triángulos rectángulos. La trigonometría se aplica desde sus orígenes en agrimensura, navegación y astronomía ya que permite calcular distancias que serían imposibles de obtener por medición directa.

En este tema estudiarás las primeras definiciones trigonométricas y conocerás algunas de sus aplicaciones.

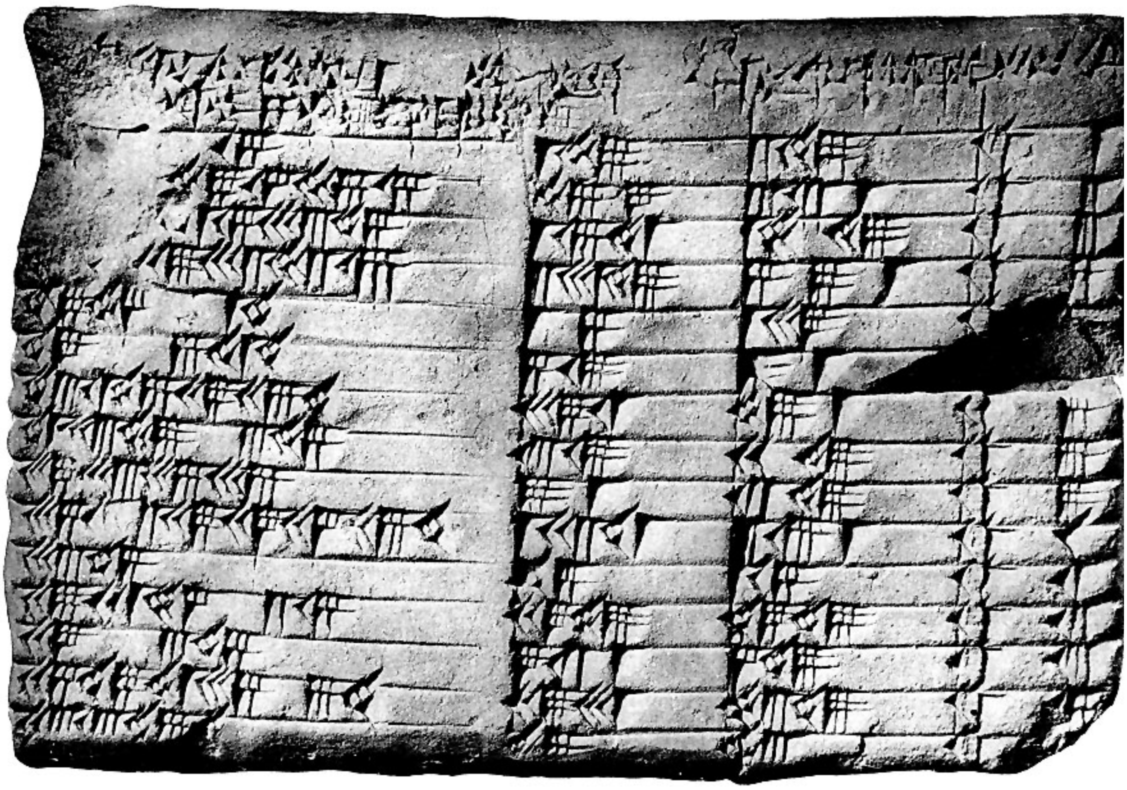


Imagen 1: Tabla babilónica.
https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa#/media/File:Plimpton_322.jpg
Autor: Desconocido Licencia: Creative Commons

Para conocer más sobre la HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA. Puedes realizar la siguiente lectura haciendo clic en el enlace. Después, intenta responder a las preguntas.

Si has leído el texto puedes responder a las siguientes cuestiones:

1.- ¿Qué es el sistema de numeración sexagesimal?

2.- ¿Qué utilidades se dio a la trigonometría en Babilonia y en el Antiguo Egipto?

3.- En la actualidad, ¿qué países forman la antigua Mesopotamia?

4.- En el texto se nos habla de que los egipcios necesitaban medir los campos tras la inundación anual. ¿En qué consiste ese fenómeno? ¿De qué río se trata?

5.- En la India, la función seno se concebía no como una proporción sino como la longitud del cateto opuesto a un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. ¿Qué dificultades presenta esta definición para el cálculo de una tabla con los valores del seno?

2) Conceptos previos

A) TRIÁNGULOS:

En un triángulo, los vértices se nombran con letras mayúsculas (A, B y C). Los lados se nombran con la letra minúscula del vértice opuesto al lado (a, b,c). Los ángulos se nombran con el acento circunflejo encima de la letra mayúscula que denota el vértice del ángulo (Â). Observa el siguiente dibujo donde te quedará más claro la nomenclatura de los triángulos:

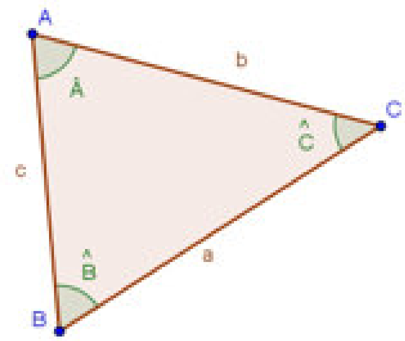


Imagen 2: Cómo se nombra un triángulo.
Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.

En un triángulo rectángulo, al ángulo recto se le asigna la letra A y así, a la hipotenusa la letra a minúscula, siendo b y c los dos catetos. Se utilizan las letras griegas α y β para nombrar a los ángulos agudos que no corresponden al de 90º respectivamente. En un triángulo rectángulo se verifica el **teorema de Pitágoras** (El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$). También se cumple que los dos ángulos agudos son complementarios, es decir, se cumple que **($\alpha + \beta = 90º$)**.

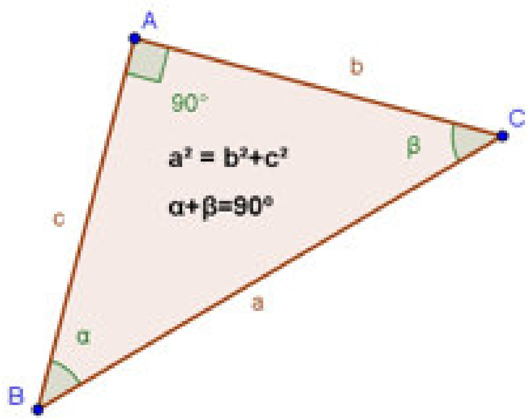


Imagen 3: Cómo se nombra un triángulo.
Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.

B) ÁNGULOS Y SU MEDIDA:

Consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio la unidad.

El punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será POSITIVO y si es igual, NEGATIVO.

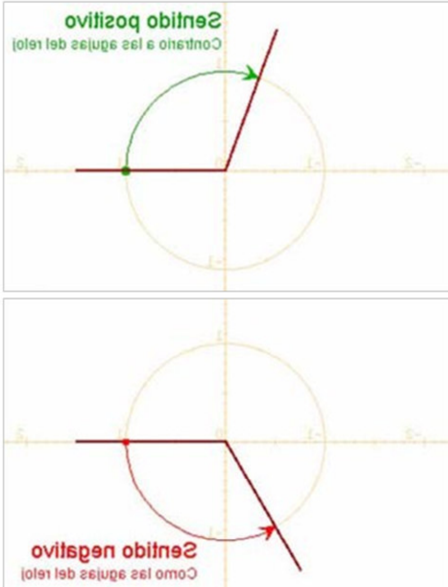


Imagen 4: Sentidos de los ángulos.
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/trigonometria/index4_7.htm
Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.

C) GRADOS SEXAGESIMALES:

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos. Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos. Así un ángulo se mide en: gradosº minutos' segundos'' → UNA VUELTA COMPLETA= 360º; 1º = 60' y 1' = 60''

D) SISTEMA INTERNACIONAL:

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia. Como la longitud de toda la circunferencia es $2\cdot\pi\cdot$radio, resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio.

En el sistema internacional, la unidad de medida de ángulos es el **radián**. El radián es un ángulo tal que, cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por rad.

A un ángulo completo le corresponde un arco de longitud $2\pi R$, a un radián un arco de longitud R, entonces:

Nº de radianes de un ángulo completo= 360º = $\mathbf{2\pi}$ rad

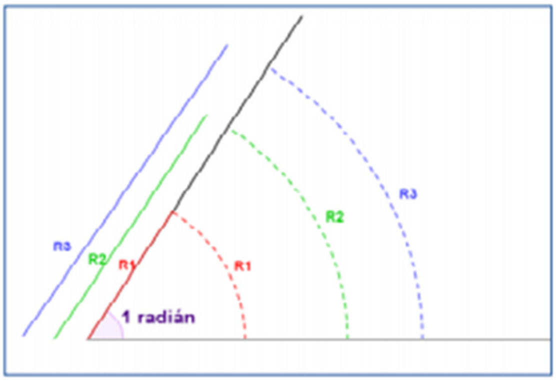


Imagen 5: Radián
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/BC1%2004%20Trigonometria.pdf
Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.

E) PASO DE RADIANES A GRADOS Y DE GRADOS A RADIANES:

El semiperímetro de la semicircunferencia es π·radio → π radianes = 180 grados.

Por tanto, únicamente debemos tener presente que:

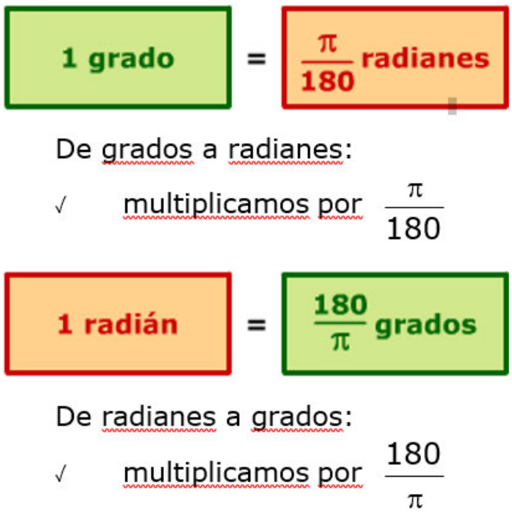


Imagen 6: Paso de radianes a grados y viceversa.
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/trigonometria/index4_7.htmAutor: Desconocido Licencia: Desconocida.

Ejercicio 1

1. Un radián es….

	a) Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide lo mismo que el radio usado para trazarlo
	b) Es la unidad de medida del sistema internacional y es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide el doble del radio usado para trazarlo
	c) Es la unidad de medida de ángulos en el mundo anglosajón

Ejercicio 2

2. Pasa a radianes o grados según corresponda:

a) 225º b) $\frac{5\pi}{4}$ c) 330º d) $\frac{8\pi}{9}$

Importante

En las calculadoras usuales suelen aparecer cuatro tipos de medida de ángulos:

- "DEG" o expresión en grados sexagesimales;
- la tecla < º ' " > da los grados enteros del ángulo y la parte decimal se cuenta en minutos (1/60 de grado) y segundos (1/60 de minuto).
- "RAD" es decir, radianes.
- "GRAD" cada grado centesimal es la centésima parte del ángulo recto, toda la circunferencia está formada por 400 grados centesimales. 1GRAD=90/100 DEG

DEBES TENER MUCHO CUIDADO PORQUE SEGÚN EN QUÉ MODO TENGAS TU CALCULADORA LOS CÁLCULOS TE LOS HARÁ CORRECTAMENTE O NO EN LAS UNIDADES QUE NECESITES.

Ejercicio 3

Transforma estas medidas a segundos:

a) 21º 10' 32''

b) 15º 40''

c) 12º 50' 40''

d) 33º 33' 33''

Ejercicio 4

Transforma estas medidas a forma compleja:

a) **450''**

b) **58' 140''**

c) **4500''**

d) **1º 2000''**

3) Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Empecemos por considerar un ángulo agudo cualquiera, utilizaremos una letra griega α (alfa) para denotarlo. Es siempre posible construir un triángulo rectángulo de modo que α sea uno de sus ángulos.

Sea $\widehat{ABC}$ uno de estos triángulos y situemos en el vértice B, el ángulo α. Se definen las razones trigonométricas directas del ángulo α: seno, coseno y tangente como:

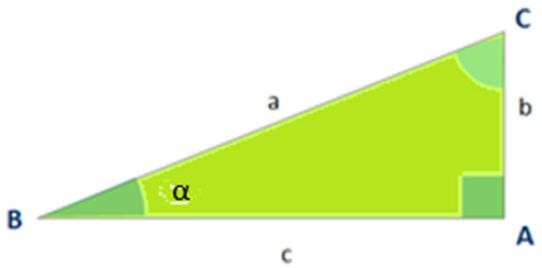


Imagen 6: Triángulo rectángulo
http://apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/08_Trigonometria.pdf
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \cos \alpha = \cos \hat{B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \tan \alpha = \tan \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

También se utilizan las expresiones tg α y tag α como símbolos de la tangente de α.

Ejercicio 5

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ cuyos catetos miden b = 30 cm y c = 40 cm.

Ejercicio 6

La tangente de un ángulo se define como…

	a) El cateto opuesto entre cateto adyacente
	b) Cateto opuesto entre hipotenusa
	c) Cateto adyacente entre cateto opuesto
	d) Hipotenusa entre cateto adyacente

Ejercicio 7

Halla las razones trigonométricas de los ángulos de los siguientes triángulos rectángulos:

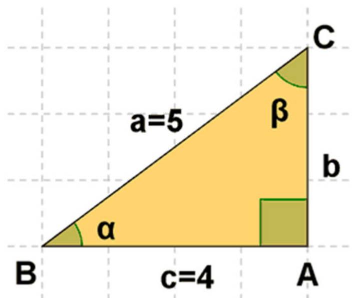


Imagen 6b: Triángulo rectángulo.
http://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/trigonometria/problemas/p_razones.html
Autor: Desconocido Licencia: desconocida

4) Relaciones trigonométricas fundamentales

Si conocemos una de las razones trigonométricas del ángulo α, es posible calcular las razones trigonométricas restantes, gracias a las dos relaciones trigonométricas fundamentales siguientes:

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \qquad tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

que también verás escrita como $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$ dado que las potencias de las razones trigonométricas suelen escribirse con su exponente sobre la última letra de su notación y a continuación el nombre del ángulo.

Ejercicio 8

Calcula el resto de las razones trigonométricas de un ángulo dado α, sabiendo que el cos α = 0,939 y que el ángulo pertenece al primer cuadrante.

Ejercicio 9

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α situado en el segundo cuadrante sabiendo que el cos α = - 1/4

Ejercicio 10

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α situado en el tercer cuadrante sabiendo que la tg α = 4/3

5) Razones trigonométricas de 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º y 270º

	Seno	Coseno	Tangente
0º	0	1	0
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90º	1	0	∞
180º	0	-1	0
270º	-1	0	∞

El saber las razones trigonométricas de los conocidos como ángulos notables, nos será útil cuando necesitemos calcular las razones de otro ángulo que pueda reducirse a alguno de éstos. Este tipo de ejercicio los veremos en el apartado 7 del tema.

6) Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es calcular las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados. En el caso de que el triángulo sea rectángulo podemos considerar tres casos dependiendo de las hipótesis o datos iniciales. En cada uno de ellos existen varias formas de obtener la solución. Vamos a describir una en cada caso:

- **PRIMER CASO: Se conoce la hipotenusa (h) y uno de los ángulos (α).**

Como estamos con un triángulo RECTÁNGULO, en realidad conocemos dos de los ángulos. Por tanto, el tercer ángulo lo obtenemos restando; ya que sabemos que en cualquier triángulo las sumas de sus tres ángulos debe ser 180º.

$$90^{\circ} + \alpha + \beta = 180^{\circ} \rightarrow \boldsymbol{\beta = 180 - 90 - \alpha}$$

A partir de ahora, nos faltaría conocer el valor de los dos catetos. Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \cos\alpha = \cos\hat{B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \tan\alpha = \tan\hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

Imagen 7: Razones trigonométricas
http://apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/08_Trigonometria.pdf
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

• SEGUNDO CASO: Se conoce uno de los ángulos y un cateto.

En este caso nos ocurre lo mismo que en el anterior; es decir, realmente conocemos dos ángulos y el que nos falta lo podemos calcular restando a 180º. De la misma forma procederemos para calcular la hipotenusa y el otro cateto.

• TERCER CASO: Se conoce dos lados del triángulo.

En este caso utilizaremos en primer lugar el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado, tanto si el que falta es un cateto como si es la hipotenusa. → $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

Para obtener el primero de los ángulos agudos, calcularemos en primer lugar una de sus razones trigonométricas a partir de las definiciones que ya conocemos. Pero una vez obtenido el valor de una de las tres razones trigonométricas: seno, coseno o tangente, para conocer el valor del ángulo debemos utilizar la calculadora. Si lo que hemos calculado suponemos que es el SENO, a la hora de escribir este paso en el papel lo despejamos escribiendo: **arcsen 0,...**, que se lee "arco seno de cero coma.…" y que significa "ángulo cuyo seno es cero coma ..." y que se obtiene con la calculadora activando el comando $\sin^{-1}$ lo que conseguiremos con la secuencia: SHIFT + SIN^{-1} + 0,...

Imagen 8: Comandos calculadora para obtener arcoseno
Fuente: Propia

De forma análoga lo haríamos si lo que hubiésemos obtenido fuera el coseno o la tangente. De todas formas recuerda que no todas las calculadoras funcionan igual, puede ocurrir que la que tu uses no funcione de la misma manera, tendrás que mirar sus instrucciones para asegurarte.

<u>Ejercicio 11</u>

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

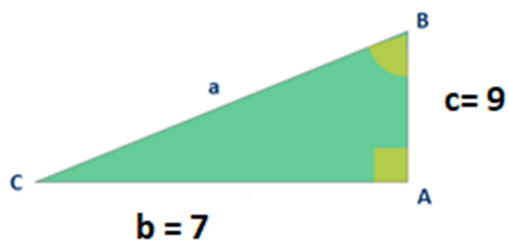


Imagen 9: Triángulo rectángulo para resolver.
Autor: Propia

Ejercicio 12

En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 5m y un cateto b = 4 m. Resuelve el triángulo.

Ejercicio 13

En un triángulo rectángulo se conoce el cateto c= 42 m y su ángulo opuesto C = 31º. Resuelve el triángulo.

---

7) Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Se llama **circunferencia goniométrica** a una circunferencia de radio 1 y con centro en el origen de un sistema de ejes coordenados.

A cada uno de los cuartos en que los ejes dividen la circunferencia se les llama **cuadrante**.

Si el ángulo es agudo, el punto está en el 1er cuadrante, si el ángulo es obtuso estará en el 2º cuadrante, si el ángulo está entre 180 º y 270 º en el 3er cuadrante y si el ángulo está entre 270º y 360º, el punto estará en el 4º cuadrante:

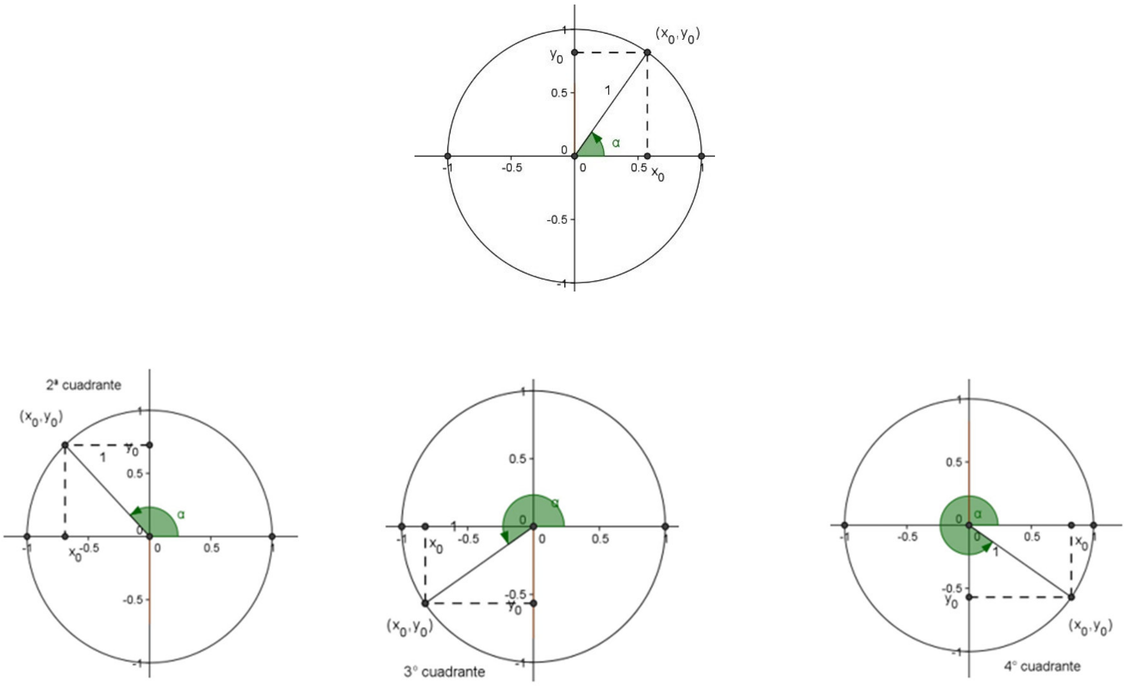


Imagen 8: Cuadrantes en la circunferencia goniométrica.
Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Los ángulos α de los cuadrantes segundo, tercero o cuarto pueden relacionarse con ángulos agudos α que podemos situar en el primer cuadrante y que tienen razones trigonométricas con los mismos valores absolutos que los ángulos iniciales.

Si consideramos el triángulo rectángulo siguiente y aplicamos la definición de seno, coseno y tangente:

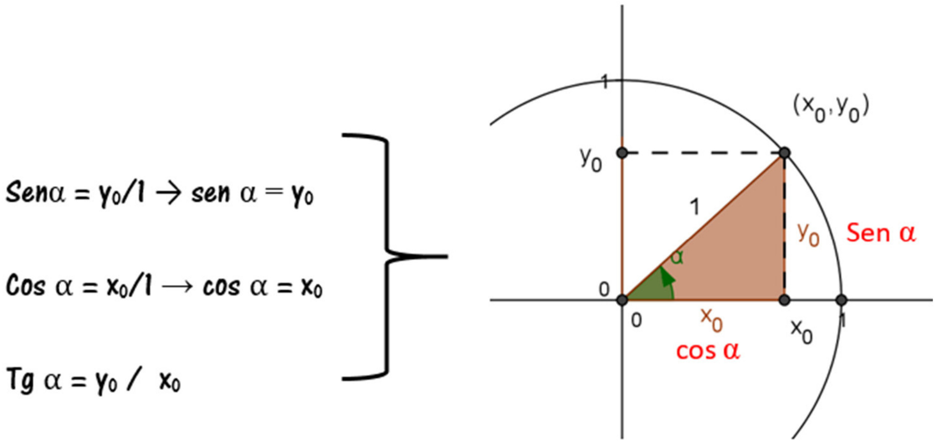
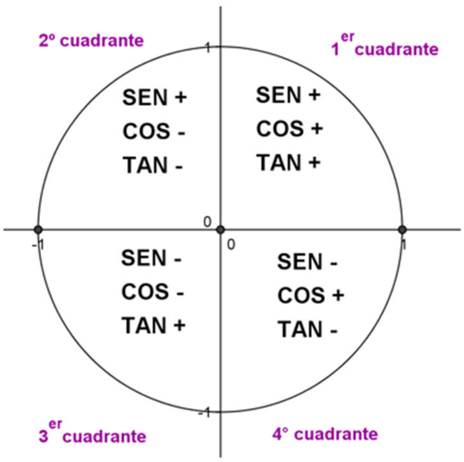


Imagen 9: Ángulo del primer cuadrante y sus razones trigonométricas.
Fuente: Propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Teniendo en cuenta que el seno es la segunda coordenada y el coseno es la primera coordenada, y la tangente se obtiene dividendo seno entre coseno, tenemos el siguiente esquema que resume el signo que tendrán las razones trigonométricas según el cuadrante donde se sitúe el ángulo:



Teniendo en cuenta que el seno es la segunda coordenada y el coseno es la primera coordenada, y la tangente se obtiene dividendo seno entre coseno, tenemos el siguiente esquema que resume el signo que tendrán las razones trigonométricas según el cuadrante donde se sitúe el ángulo.

Imagen 10: signo de las razones trigonométricas según el cuadrante del ángulo.
Fuente: Propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Ejercicio 14

Los ángulos del cuarto cuadrante….

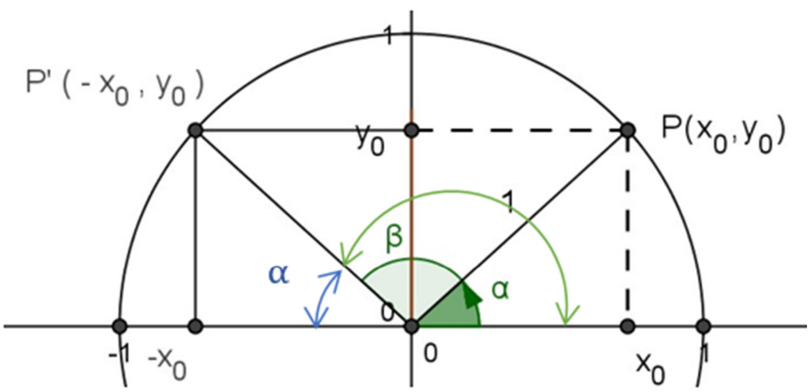
	a) Tienen el seno y el coseno negativos y la tangente positiva
	b) Tienen la tangente y el seno negativos mientras que su coseno es
	c) Tienen todas sus razones trigonométricas negativas
	d) Tienen todas sus razones trigonométricas positivas

7.1) Reducción de ángulos del segundo cuadrante al primero

Ya hemos comentado que los ángulos pertenecientes a cuadrantes diferentes del primero, se pueden relacionar con ángulos agudos del primer cuadrante y que comparten los MISMOS VALORES ABSOLUTOS en sus razones trigonométricas, y cuyos signos dependen del cuadrante según la imagen 10.

Pues, vamos a estudiar cómo se relacionan los ángulos del segundo cuadrante con los del primer cuadrante. A estos ángulos se les conoce con el nombre de ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS. Dos ángulos α y β son suplementarios cuando al sumarlos obtenemos 180º, es decir:

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS →α +β = 180º



Sen α = **sen** β ; **cos** α = - **cos** β; **tg** α = - **tg** β

Imagen 11: Relación entre ángulos del primer y segundo cuadrante.
Fuente: Propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

En la figura observamos que cuando dos ángulos son suplementarios los puntos que los determinan P y P' comparten el valor absoluto de sus coordenadas y difieren sólo en el signo de la primera coordenada, x_0.

Por tanto, aplicando la definición de seno y coseno en el ángulo β :

Sen α = sen β ; cos α = - cos β; tg α = - tg β

Ejercicio 15

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 170º:

Ejercicio 16

Señala la respuesta incorrecta….

	a) Sen 165º = sen 15º
	b) Cos 15º = - cos 165º
	c) tg 15º = tg 165º

Ejercicio 17

Calcula las razones trigonométricas de 135º, a partir de los ángulos agudos notables.

7.2) Reducción de ángulos del tercer cuadrante al primero

Los ángulos que se encuentran en el tercer cuadrante son ángulos mayores de 180º pero menores de 270º. En los casos dónde necesitemos reducir al primer cuadrante ángulos que pertenecen al tercero, trabajaremos con ángulos que DIFIEREN 180º.

Propiedad: Sean dos ángulos α y β tales que

β – α = 180º entonces se verifica que:

Sen α = - sen β ;

cos α = - cos β;

tg α = tg β

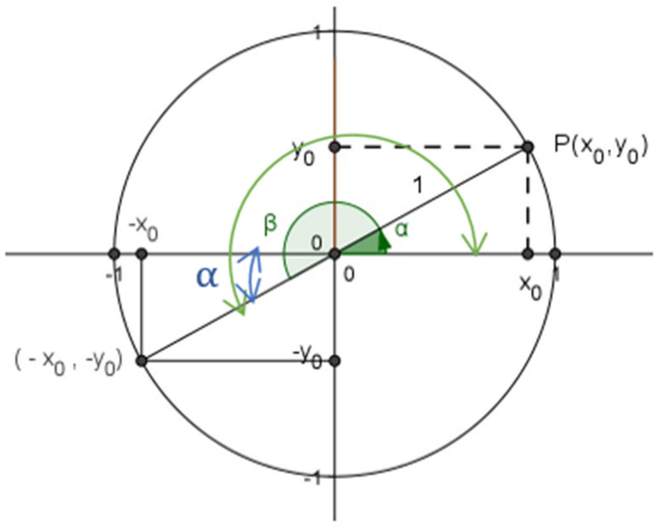


Imagen 12: Relación entre ángulos del primer y tercer cuadrante. Fuente: Propia.
Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Ejercicio 18

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 235º.

Ejercicio 19

Calcula las razones trigonométricas de 240º, a partir de los ángulos agudos notables.

7.3) Reducción de ángulos del cuarto cuadrante al primero

Si el ángulo que queremos reducir al primer cuadrante pertenece al cuarto, entonces veremos que pueden darse dos situaciones hablando del mismo ángulo:

1. ÁNGULOS OPUESTOS → α y -α
2. ÁNGULOS QUE SUMAN 360º → α y β de forma que α + β = 360º

En la imagen 13 veremos que el ángulo β coincide con -α, y por tanto, podemos decir que β = -α.

Sean dos ángulos α y β tales que

β + α = 360º o β = - α entonces se verifica que:

Sen α = - sen β ;

cos α = cos β;

tg α = -tg β

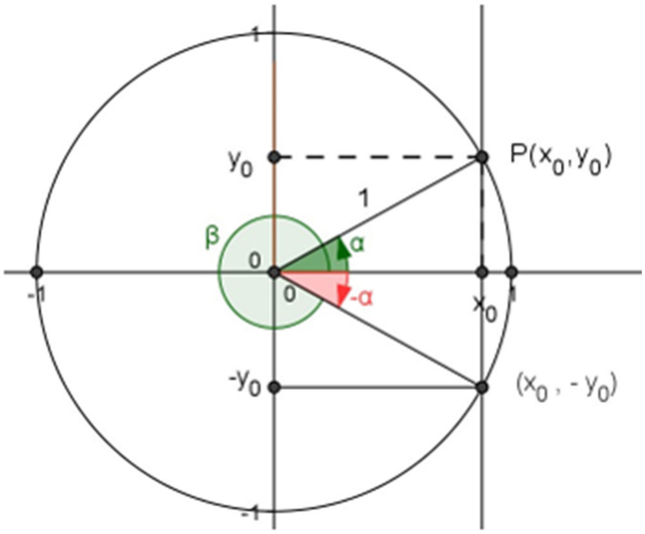


Imagen 13: Relación entre ángulos del primer y cuarto cuadrante.
Fuente: Propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Ejercicio 20

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 315º y de -45º.

Ejercicio 21

Calcula las razones trigonométricas de 330º, a partir de los ángulos agudos notables.

9) Aplicaciones de la Trigonometría

La trigonometría es útil para resolver problemas geométricos y calcular longitudes en la realidad.

Con un teodolito, se pueden medir ángulos, tanto en el plano vertical como en el horizontal, que nos permiten, aplicando las razones trigonométricas, hallar distancias o calcular alturas de puntos inaccesibles.

En estos casos aunque el triángulo de partida no sea rectángulo, trazando su altura podemos obtener dos triángulos rectángulos a resolver con los datos que tenemos.

Imagen 14: Teodolito moderno.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Theodolite_in_use.JPG
Autor: Desconocido Licencia: Creative Commons

Veamos algunos ejemplos.

Imaginemos la siguiente situación:

Para medir la anchura de un río se han medido los ángulos de la figura desde dos puntos de una orilla (punto A y el punto B) distantes entre sí 160 m. ¿Qué anchura tiene el río?

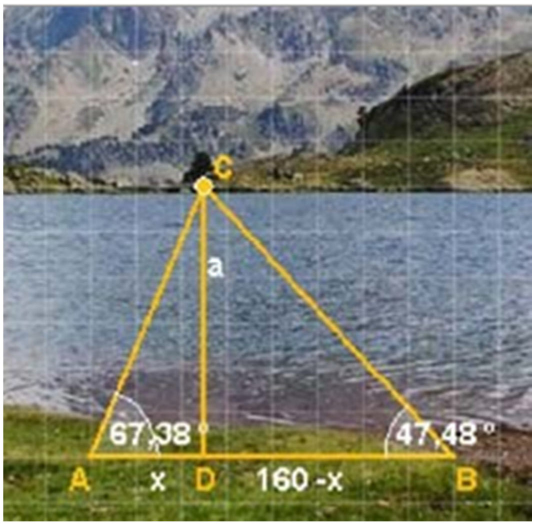


Imagen 15: Río. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/trigonometria/index4_7.htm

✓ La anchura del río es la altura (a) del triángulo ACB que no es rectángulo, pero sí lo son los triángulos ADC y BDC.

$$En\ el\ triangulo\ ADC{:}tg\ 67{,}38^o = \frac{a}{x} \rightarrow a\ =\ x \cdot tg\ 67{,}38^o$$

$$En\ el\ triangulo\ BDC{:}tg\ 47{,}48^o = \frac{a}{160-x} \rightarrow a\ =\ (160-x) \cdot tg\ \ 47{,}48^o$$

✓ Tenemos un sistema de dos ecuaciones que resolvemos por igualación:

$$\left.\begin{array}{r} a = tg\ 67{,}38^o\ \cdot\ x \\ a =\ (160-x)\ \cdot\ tg\ 47{,}48^o \end{array}\right\} \rightarrow tg\ 67{,}38^o\ \cdot\ x\ =\ (160-x)\ \cdot\ tg\ 47{,}48^o \rightarrow$$

$$\rightarrow 2{,}40 \cdot x = (160-x) \cdot 1{,}09 \rightarrow x = 50 \rightarrow a = 2{,}40 \cdot x = 2{,}40 \cdot 50 = 120\ m$$

<u>**Ejercicio 22**</u>

La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50º con la horizontal mide 8 m, ¿cuál es la altura del árbol?

<u>**Ejercicio 23**</u>

El kiosco de diarios y varios del señor Gutiérrez, proyecta una sombra de 1,8 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del kiosco es de 60º, ¿cuál es la altura del kiosco?

<u>**Ejercicio 24**</u>

Calcular la altura de un árbol sabiendo que, si nos situamos 8 metros de distancia de la base del tronco, vemos la parte superior de su copa en un ángulo de 36.87º.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

1. Un radián es….

	a) Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide lo mismo que el radio usado para trazarlo
X	b) Es la unidad de medida del sistema internacional y es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide el doble del radio usado para trazarlo
X	c) Es la unidad de medida de ángulos en el mundo anglosajón

Ejercicio 2

2. Pasa a radianes o grados según corresponda:

a) 225º b) $\frac{5\pi}{4}$ c) 330º d) $\frac{8\pi}{9}$

a) $225 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{45\pi}{36} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$

b) $\frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180 \cdot 5}{4} = 225^{\circ}$

c) $330 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{33\pi}{18} = \frac{11\pi}{6}$

d) $\frac{8\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180 \cdot 8}{9} = 160^{\circ}$

Importante

En las calculadoras usuales suelen aparecer cuatro tipos de medida de ángulos:

- "DEG" o expresión en grados sexagesimales;
- la tecla < º ' " > da los grados enteros del ángulo y la parte decimal se cuenta en minutos (1/60 de grado) y segundos (1/60 de minuto).
- "RAD" es decir, radianes.
- "GRAD" cada grado centesimal es la centésima parte del ángulo recto, toda la circunferencia está formada por 400 grados centesimales. 1GRAD=90/100 DEG

DEBES TENER MUCHO CUIDADO PORQUE SEGÚN EN QUÉ MODO TENGAS TU CALCULADORA LOS CÁLCULOS TE LOS HARÁ CORRECTAMENTE O NO EN LAS UNIDADES QUE NECESITES.

Ejercicio 3

Transforma estas medidas a segundos:

a) 21º 10' 32''

b) 15º 40''

c) 12º 50' 40''

d) 33º 33' 33''

Para pasar cada medida a segundos, simplemente multiplicamos la cantidad de minutos por 60, y la cantidad de grados por 3600 (que es lo mismo que multiplicar dos veces por 60) y sumamos todo:

a) 21º 10' 32'' = 76232''

b) 15º 40'' = 54040''

c) 12º 50' 40'' = 46240''

d) 33º 33' 33'' = 120813''

Ejercicio 4

Transforma estas medidas a forma compleja:

a) 450''

b) 58' 140''

c) 4500''

d) 1º 2000''

Para transformar las medidas a forma compleja (con grados, minutos y segundos), dividimos los segundos entre 60. El resto de la división serán segundos; el cociente, son minutos. Repetimos la operación con los minutos (los que nos salieran en la división anterior más los que nos dé el ejercicio) pero en este caso el resto de la división serán los minutos totales, y el cociente los grados:

a) 450'' = 7' 30''

b) 58' 140'' = 1º 20''

c) 4500'' = 1º 15'

d) 1º 2000'' = 1º 33' 20''

Ejercicio 5

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ cuyos catetos miden b = 30 cm y c = 40 cm.

Calculamos en primer lugar el valor de la hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \Rightarrow$ $a = \sqrt{2500} = 50$ cm.

$$sen\,\hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6\,;\ \cos\hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8\,;\ tg\,\hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75\,.$$

$$sen\,\hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8\,;\ \cos\hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6\,;\ tg\,\hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}\,.$$

Ejercicio 6

La tangente de un ángulo se define como…

X	a) El cateto opuesto entre cateto adyacente
	b) Cateto opuesto entre hipotenusa
	c) Cateto adyacente entre cateto opuesto
	d) Hipotenusa entre cateto adyacente

Ejercicio 7

Halla las razones trigonométricas de los ángulos de los siguientes triángulos rectángulos:

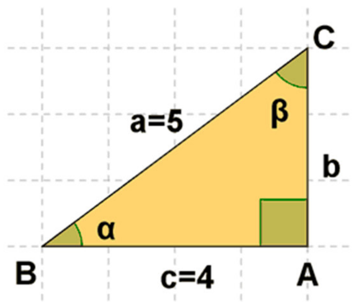


Imagen 6b: Triángulo rectángulo.
http://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/trigonometria/problemas/p_razones.html
Autor: Desconocido Licencia: desconocida

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Leftrightarrow b = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 8

Calcula el resto de las razones trigonométricas de un ángulo dado α, sabiendo que el cos α = 0,939 y que el ángulo pertenece al primer cuadrante.

Utilizando las relaciones fundamentales sabemos que: $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$; por tanto sustituyendo y despejando sen α ya obtenemos su valor:

$\text{sen}^2\ \alpha + 0{,}939^2 = 1 \rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - 0{,}881 \rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 0{,}118 \rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{(0{,}118)} = 0{,}343$

Y utilizando la otra relación podemos obtener la tangente del ángulo:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{0{,}343}{0{,}939} = 0{,}365$$

Ejercicio 9

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α situado en el segundo cuadrante sabiendo que el cos α = - 1/4

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$$

$$\text{sen}^2\ \alpha = 1 - \cos^2\ \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\text{sen}\ \alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como el ángulo α está en el segundo cuadrante es positivo

$$\text{sen}\ \alpha = +\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{4} : \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{4\sqrt{15}}{4} = -\sqrt{15}$$

Ejercicio 10

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α situado en el tercer cuadrante sabiendo que la tg α = 4/3

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$$

$$\frac{\text{sen}^2\ \alpha}{\cos^2\ \alpha} + \frac{\cos^2\ \alpha}{\cos^2\ \alpha} = \frac{1}{\cos^2\ \alpha} \rightarrow \text{tg}^2\ \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\ \alpha}$$

$$\cos^2\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}^2\ \alpha + 1} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{16}{9} + 1} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}$$

$$\cos\ \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

Como la tangente del ángulo es positiva, el ángulo sólo puede pertenecer al primer o al tercer cuadrante. Si pertenece al primer cuadrante, tanto el seno como el coseno serán positivos; mientras que si pertenece al tercer cuadrante ambos serán negativos.

$$\cos\ \alpha = +\frac{3}{5}$$

$$\text{sen}^2\ \alpha = 1 - \cos^2\ \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Ejercicio 11

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

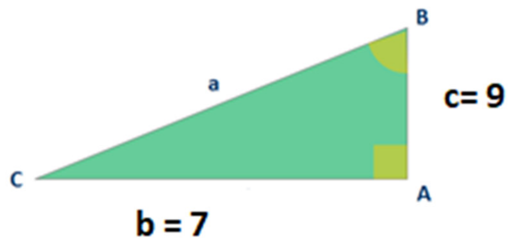


Imagen 9: Triángulo rectángulo para resolver.
Autor: Propia

Resolver un triángulo consiste en dar los datos de sus tres lados y sus tres ángulos.

Como nos dan dos lados, procederemos a resolverlo como el tercer caso. Primero, utilizando Pitágoras podemos obtener el tercer lado:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 7^2 + 9^2 \rightarrow a^2 = 49 + 81 = 130 \rightarrow a = \sqrt{130} = 11{,}4$

Ahora ya tenemos el valor de los tres lados. Nos queda por saber el valor de los tres ángulos. Pero como el triángulo es rectángulo, ya sabemos uno de ellos: **$\hat{A} = 90°$** , por tanto, sólo nos queda por saber cuánto valen los otros dos.

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{7}{11{,}4} = 0{,}614 \rightarrow \hat{B} = arc\ sen\ 0{,}614 = 37{,}879^o = 37^o\ 52'\ 45''$$

si procedemos de forma análoga podemos obtener el otro ángulo que nos falta:

$$sen\ \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{9}{11{,}4} = 0{,}789 \rightarrow \hat{C} = arc\ sen\ 0{,}789 = 52{,}092^o = 52^o\ 5'\ 32''$$

Ejercicio 12

En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa a = 5m y un cateto b = 4 m. Resuelve el triángulo.

Resolver un triángulo consiste en dar los datos de sus tres lados y sus tres ángulos.

Como nos dan dos lados, procederemos a resolverlo como el primer caso. Primero, utilizando Pitágoras podemos obtener el tercer lado:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 5^2 = 4^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow c = \sqrt{9} = 3$ m

Ahora ya tenemos el valor de los tres lados. Nos queda por saber el valor de los tres ángulos. Pero como el triángulo es rectángulo, ya sabemos uno de ellos: **$\hat{A} = 90°$** , por tanto, sólo nos queda por saber cuánto valen los otros dos.

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \rightarrow \hat{B} = arc\ sen\ 0{,}8 = 53{,}13010^o = 53^o\ 7'\ 48''$$

si procedemos de forma análoga podemos obtener el otro ángulo que nos falta:

$$sen\ \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \rightarrow \hat{C} = arc\ sen\ 0{,}6 = 36.8698^o = 36^o\ 52'\ 12''$$

Ejercicio 13

En un triángulo rectángulo se conoce el cateto c= 42 m y su ángulo opuesto C = 31º. Resuelve el triángulo.

Resolver un triángulo consiste en dar los datos de sus tres lados y sus tres ángulos.

Como nos dan un lado y un ángulo, procederemos a resolverlo como el segundo caso. Primero, como el triángulo es rectángulo, ya sabemos dos de los ángulos, uno el que nos dan como dato y el otro: **Â = 90 º** , por tanto, sólo nos queda por saber cuánto vale el tercero. Sabemos que la suma de todos los ángulos de un triángulo debe ser 180º. Así:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^{o}\rightarrow\widehat{B}=180-90-31=59^{o}$$

Ahora ya tenemos el valor de los tres ángulos. Nos queda por saber el valor de los tres lados y sólo tenemos uno. Así que todavía NO podemos usar Pitágoras. Aplicando las definiciones de trigonometría tenemos:

$$sen\ \widehat{C}\rightarrow sen\ \ 31^{o}\ =\frac{42}{a}\rightarrow 0{,}515=\frac{42}{a}\rightarrow a=\frac{42}{0{,}515}=\ 81{,}5534\ m$$

Ahora sí que podemos usar Pitágoras para obtener el tercer lado:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 81{,}5534^2 = 42^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 6650{,}96 - 1764 = 4886{,}96 \rightarrow b = \sqrt{4886{,}96} = 69{,}91$ m

Ejercicio 14

Los ángulos del cuarto cuadrante….

	a) Tienen el seno y el coseno negativos y la tangente positiva
X	b) Tienen la tangente y el seno negativos mientras que su coseno es ...
	c) Tienen todas sus razones trigonométricas negativas
	d) Tienen todas sus razones trigonométricas positivas

Ejercicio 15

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 170º:

170º pertenece al segundo cuadrante, ya que es mayor de 90º y menor de 180º.

También, 170^0 es el suplementario de 10º que está en el primer cuadrante porque → 180º - 170º=10º.

Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las razones trigonométricas de 10º, de la siguiente manera:

sen 170º = sen 10º ; cos 170º = - cos 10º; tag 170º = - tag 10º .

Ejercicio 16

Señala la respuesta incorrecta….

	a) Sen 165º = sen 15º
	b) Cos 15º = - cos 165º
X	c) tg 15º = tg 165º

Como 165 + 15 = 180 son ángulos suplementarios y por tanto sus senos coinciden tanto en valor como en el signo.

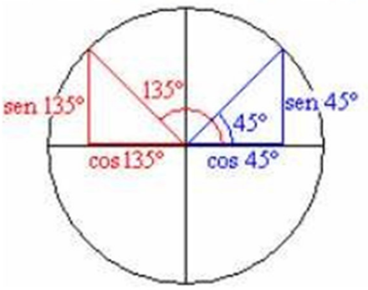
Como 165 + 15 = 180 son ángulos suplementarios y por tanto sus cosenos coinciden en valor pero con el signo cambiado.

Esta es la respuesta incorrecta, ya que al ser ángulos suplementarios sus tangentes son iguales en valor pero de signo contrario.

Ejercicio 17

Calcula las razones trigonométricas de 135º, a partir de los ángulos agudos notables.

135º es suplementario con 45º (135º + 45º =180º). Las razones trigonométricas de 135º están relacionadas con las de 45º, la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.



$$\text{sen}\,135° = \text{sen}\,45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\,135° = \frac{\text{sen}\,135°}{\cos 135°} = \frac{\text{sen}\,45°}{-\cos 45°} = -\text{tg}\,45° = -1$$

Ejercicio 18

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 235º.

Este ángulo pertenece al tercer cuadrante ya que se encuentra entre 180º y 270º.Así, 235º – 180º = 55º , que está en el primer cuadrante.

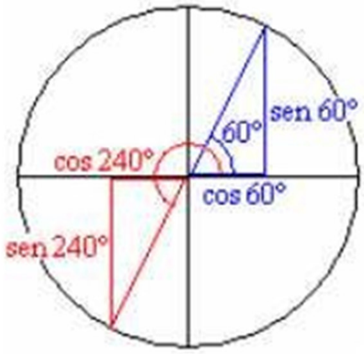
Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las de 55º ya que son ángulos que difieren 180º :

sen 235º = - sen 55º ; cos 235º = - cos 55º; tag 235º = tag 55º .

Ejercicio 19

Calcula las razones trigonométricas de 240º, a partir de los ángulos agudos notables.

240° se asocia a 60° porque se diferencia del él en 180° (240° = 60° +180°).



$$\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 240° = \frac{\operatorname{sen} 240°}{\cos 240°} = \frac{-\operatorname{sen} 60°}{-\cos 60°} = \operatorname{tg} 60 = \sqrt{3}$$

Ejercicio 20

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 315º y de -45º.

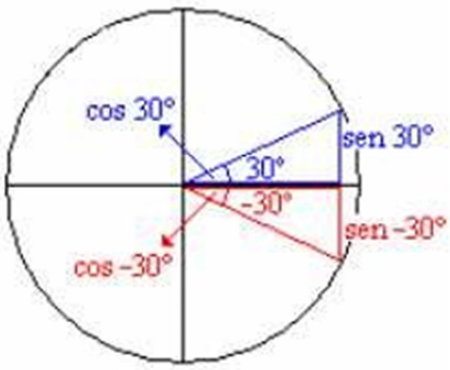
360º – 315º = 45º , que está en el primer cuadrante. Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las de 45º ya que son ángulos que suman 360º: sen 315º = - sen 45º ; cos 315º = cos 45º; tag 315º = - tag 45º .

Por otro lado -45º es el ángulo opuesto de 45º y por tanto aplican las mismas fórmulas: sen -45º = - sen 45º ; cos -45º = cos 45º; tag -45º = - tag 45º .

Ejercicio 21

Calcula las razones trigonométricas de 330º, a partir de los ángulos agudos notables.

330° equivalente a –30°, asociado a 30°



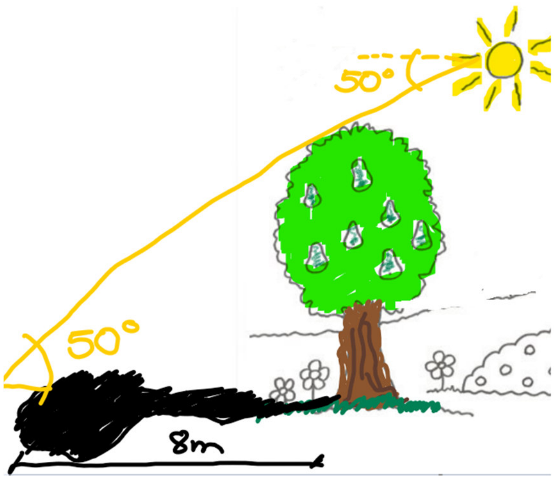
$$\operatorname{sen} -30° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos -30° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(-30°) = \frac{\operatorname{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = -\operatorname{tg}30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 22

La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50º con la horizontal mide 8 m, ¿cuál es la altura del árbol?



Si pasamos la situación a un triángulo tendremos:

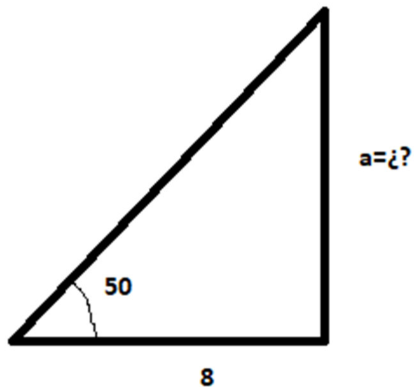


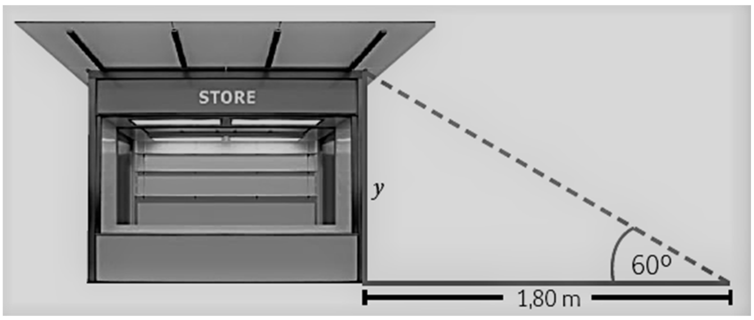
Imagen 15 y 16: Elaboración propia

Se reduce a calcular el valor de a. Para ello sabemos, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas, que:

$$tg\ 50 = \frac{a}{8} \rightarrow a = tg\ 50 \cdot 8 \rightarrow a = 1{,}192 \cdot 8 = 9{,}53\ m$$

Ejercicio 23

El kiosco de diarios y varios del señor Gutiérrez, proyecta una sombra de 1,8 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del kiosco es de 60º, ¿cuál es la altura del kiosco?



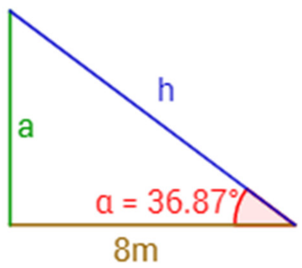
Como lo que nos piden es la altura del kiosco, ésta corresponde con el lado que hemos llamado y,

Al darnos el otro cateto del triángulo que formaría la sombra con el kiosco, nos interesa usar la tangente:

$$tg\ 60^o = \frac{y}{1{,}8}: \rightarrow y = tg\ 60^o \cdot 1{,}8 = 1{,}732 \cdot 1{,}8 \rightarrow y = 3{,}12\ m$$

Ejercicio 24

Calcular la altura de un árbol sabiendo que, si nos situamos 8 metros de distancia de la base del tronco, vemos la parte superior de su copa en un ángulo de 36.87º.



Como nos piden la altura del árbol, ésta corresponde con el lado a de nuestro dibujo.

Por tanto, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas, vemos que la que más nos interesa es la de la tangente:

$$tg\ 36{,}87^{o} = \frac{a}{b} = \frac{a}{8} \rightarrow a = tg\ 36{,}87^{o} \cdot 8 = 0{,}75 \cdot 8 \rightarrow a = 6\ m$$