Bloque 10. Tema 1.

Funciones. Función lineal. Función Cuadrática.

ÍNDICE

1) Introducción

Comprender las matemáticas es necesario para insertarse adecuadamente en el mundo actual; pensar de forma lógica, sistemática y razonar nos sirve para solucionar problemas que precisan de conocimientos comunes para poder dar respuesta. Este tipo de comunicación necesita de un conjunto de habilidades para las cuales es fundamental el aprendizaje de las matemáticas y su lenguaje. Representar e interpretar, por ejemplo, son aspectos de la comunicación que ejercitarás en este bloque.

Este primer tema se forma con tres apartados diferenciados: una primera parte de **GENERALIDADES DE FUNCIONES**, otra segunda en la que tratamos las **FUNCIONES LINEALES** y la última en la que estudiamos la **FUNCIÓN CUADRÁTICA.** En la primera, desarrollaremos la interpretación de las gráficas de funciones y los conocimientos previos que necesitaremos para desarrollar correctamente las funciones. En la segunda y tercera, se desarrolla el tratamiento de funciones lineales, afines y cuadráticas mediante situaciones y problemas de la vida cotidiana.

2) Funciones

El concepto de función es bastante abstracto, lo que hace complicada su definición y comprensión; sin embargo, sus aplicaciones son múltiples y muy útiles, lo que las hace muy importantes.

Por ejemplo, las funciones sirven para poder explicar muchos fenómenos que ocurren en disciplinas tan diferentes como la Física, la Economía o la Sociología. A pesar de las dificultades, algunas características que poseen las funciones se entienden fácilmente cuando se representan gráficamente, por resultar entonces muy intuitivas, y eso es suficiente para poder analizar y resolver muchas cuestiones.

Existen multitud de fenómenos en nuestra vida cotidiana en los que aparecen relacionadas dos magnitudes. Pero, ¿recuerdas lo que es una **MAGNITUD**?, una magnitud es cualquier cualidad que se pueda medir y expresar mediante un número.

Por ejemplo, el precio de un billete en un medio de transporte y la distancia del viaje, son dos magnitudes que se relacionan entre sí porque ambas son cuantificables y el precio final del billete tiene relación con la distancia del viaje. Otros ejemplos serían el precio de un kilo de fruta o carne y el número de kilos que compramos; o la duración de un trayecto y la velocidad a la que vamos; el número de latidos del corazón en una unidad de tiempo… todas ellas son situaciones donde relacionamos dos magnitudes. Muchas de esas relaciones se rigen por una ley de proporcionalidad, directa o inversa, pero hay otras muchas en las que la correspondencia entre ambas magnitudes es más complicada.
Esta relación funcional se puede establecer, muchas veces, mediante una expresión matemática o fórmula (**expresión algebraica o analítica de la función**), lo que nos permitirá trabajar de forma cómoda con ella. Otras veces viene dada mediante una **tabla de valores** donde aparecen los valores relacionados entre sí. En ocasiones tenemos la relación en forma de **gráfica**…

Una **función** es una relación existente entre dos magnitudes a través de una expresión matemática, de tal manera que a cada valor de la primera, a la que llamaremos **VARIABLE INDEPENDIENTE**, le corresponde un único valor de la segunda variable a la que llamaremos **VARIABLE DEPENDIENTE**.

Ejemplo:

El precio de un viaje en taxi viene dado por una parte fija, a la que llamamos bajada de bandera de 3€, y además 50 céntimos por cada minuto de duración del viaje. Si lo expresamos en forma de función sería: $Y = f(x) = 0{,}5X + 3$*, siendo X el tiempo en minutos que dura el viaje e Y sería el resultado de lo que debemos pagar. Como podemos observar la función relaciona dos variables:* ***X*** *es la variable independiente e* ***Y*** *que es la variable dependiente (depende de los minutos que dure el viaje).*

En ella, **f** es el nombre que le ponemos a la función y podríamos llamarla usando otras letras (las que se usan más son "f", "g" y "h"). Entre paréntesis va la **variable "x"** que representa el número de minutos que vamos en taxi, y ésta es la variable independiente puesto que nosotros elegimos libremente a dónde necesitamos ir. Por último, **la variable "y"** representa el precio que debemos pagar, y es la variable dependiente puesto que "depende" de cuántos minutos nos lleve llegar, es decir, depende de "x".

La expresión, **f(x)** que se lee "f de x", se suele usar con mucha frecuencia para designar a la variable dependiente porque:

1º) en ella se ve cuál es la variable independiente y, por tanto:

2º) resulta muy cómodo escribir cuánto nos costaría ir en taxi un tiempo concreto, por ejemplo, 15 minutos. Se expresaría "f de 15" y su valor es $f(15) = 0{,}5 \cdot 15 + 3 = 10{,}5$ €. (Sustituir en la expresión de la función la X por el valor 15)

Las funciones se representan sobre unos **ejes cartesianos o de coordenadas** para estudiar mejor su comportamiento.

Resumiendo: Una función la podemos expresar a través de su expresión algebraica o analítica, su tabla de valores o su gráfica. Y además, conocida una de ellas podemos ser capaces de concretar las otras.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

$$Y = f(x) = 0{,}5X + 3$$

TABLA DE VALORES

x	10	20	30
Y = 3 + 0,5X	**8**	**13**	**18**

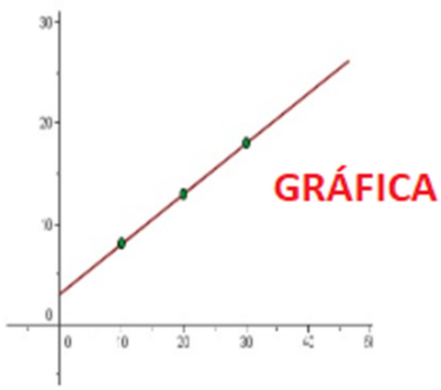


Imagen Nº 1. Representación de Funciones. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Existen diversos tipos de funciones, en este tema nos centraremos en las FUNCIONES LINEALES y CUADRÁTICAS, las que se representan gráficamente mediante una recta y una parábola, respectivamente. Pero antes de comenzar con ellas recordaremos algunos conceptos que necesitamos para empezar.

<u>Ejercicio 1</u>:

De las siguientes relaciones que se establecen entre dos variables, INDICA si SON FUNCIONES:

	S / N
a) El coste de comprar fruta y el número de kilos comprados.	
b) El coste de una llamada telefónica y su duración.	
c) Velocidad de un vehículo y tiempo empleado en recorrer una distancia.	
d) Edad de una persona y su color de pelo.	
e) Color de un diario y número de páginas escritas.	
f) Cantidad de alumnos de una clase y número de aprobados.	
g) El sexo de una persona y la cantidad de cigarrillos diarios que fuma.	

<u>Ejercicio 2</u>:

Fíjate en las gráficas siguientes hay dos lineales y dos no lineales, indica cuál es de cada tipo:

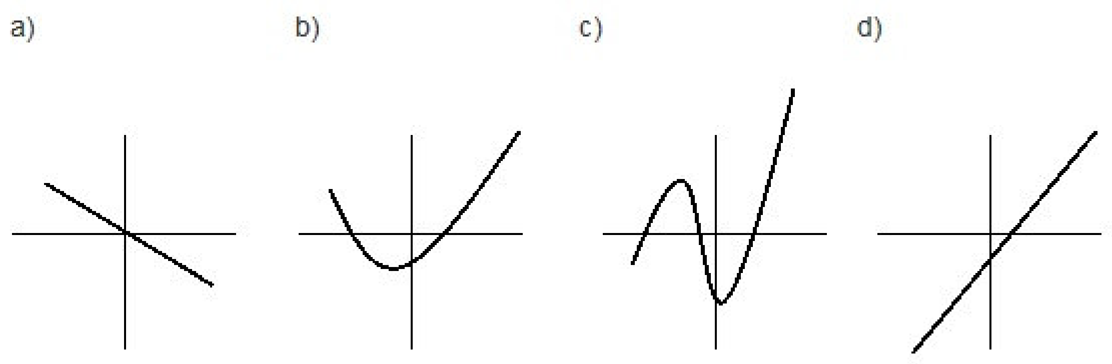


Imagen Nº 2. Gráficas. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

a)

b)

c)

d)

Ejercicio 3:

Indica cuál es la variable dependiente (Y) y cuál la independiente (X) en las siguientes funciones:

a) El coste de comprar fruta y el número de kilos comprados.

DEPENDIENTE Y	INDEPENDIENTE X

b) El coste de una llamada telefónica y su duración.

DEPENDIENTE Y	INDEPENDIENTE X

c) Velocidad de un vehículo y tiempo empleado en recorrer una distancia.

DEPENDIENTE Y	INDEPENDIENTE X

2.1. Ejes de coordenadas o cartesianos

Según estudiamos en el módulo anterior, cuando queremos representar gráficamente un número, los dibujamos sobre una recta, llamada recta numérica, en la cual establecemos un punto de referencia, que es el 0, a partir del cual trazamos los números positivos (hacia la derecha) y los negativos (hacia la izquierda).

Pues bien, si estamos trabajando con una única variable que toma valores numéricos y los queremos representar, lo haremos igualmente sobre dicha recta. Entonces diremos que estamos trabajando en una dimensión o sólo con longitudes.

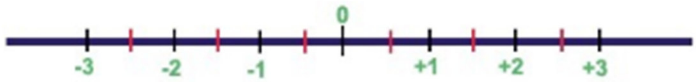


Imagen Nº 3. Recta. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Ahora bien, si trabajamos con objetos de dos dimensiones, en el plano, necesitamos dos valores para referirnos a ellos, ya que están determinados por su longitud y su anchura, que no tienen por qué ser iguales y que siguen direcciones diferentes. Seguro que recuerdas el famoso juego de los barcos: tocado, hundido y agua. De la misma manera, si tenemos dos variables que están relacionadas (una función), que toman valores numéricos y los queremos dibujar, tendremos que utilizar dos rectas o ejes diferentes (cada uno para los datos correspondientes a una variable) y que sean secantes para poder establecer la relación entre ambas. Si las rectas se cortan de forma perpendicular, es más sencillo trabajar. El sistema de representación de puntos en el plano llamado **EJE DE COORDENADAS O EJES CARTESIANOS** está formado por dos ejes perpendiculares, uno horizontal llamado **EJE DE ABSCISAS**, donde se representan los valores de la variable independiente (que toma los valores libremente, y que suele llamarse "x"), y otro vertical llamado **EJE DE ORDENADAS**, donde se representan los valores de la variable dependiente (porque se calculan a partir de la otra, y que suele llamarse "y"). El punto donde se cortan ambos ejes se llama **ORIGEN DE COORDENADAS** y, al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como **CUADRANTES**, y que se nombran en el sentido contrario a las agujas del reloj empezando desde la parte positiva del eje de abscisas.

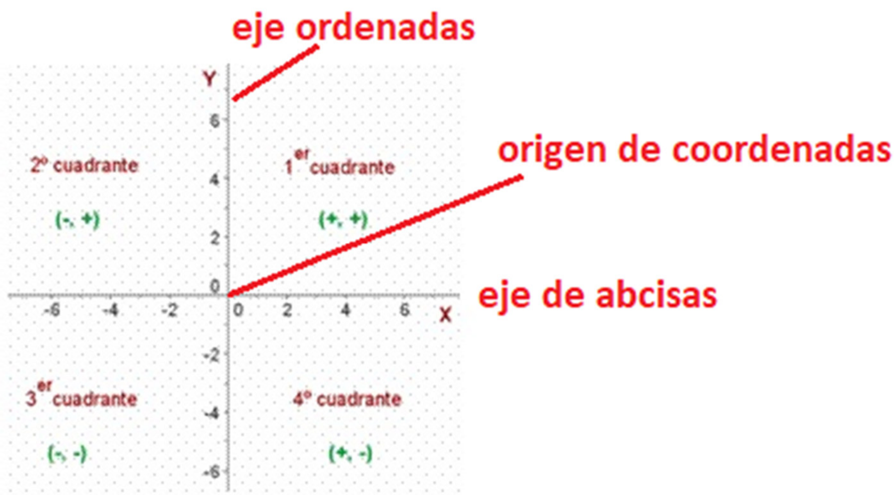


Imagen Nº 4. Ejes de coordenadas. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Una vez establecido el EJE DE COORDENADAS con respecto al cual poder situar los puntos, para llegar a uno en concreto partimos del origen de coordenadas al que llamamos punto "O", recorremos una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto queda determinado por un par de números, la medida de los caminos realizados en ambas direcciones, a los que llamamos **COORDENADAS DEL PUNTO**. El origen de coordenadas, O, tiene de coordenadas: O (0, 0).

Las coordenadas de un punto A son un par ordenado de números reales **(x, y)**, siendo "x" la primera coordenada o abscisa (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical) e "y" la segunda coordenada u ordenada (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal). Cuando ese valor se toma hacia la izquierda o hacia abajo lo indicamos con un número negativo y si es hacia arriba o a la derecha lo indicamos con uno positivo, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.

De esta forma, cualquier punto del plano queda totalmente determinado mediante sus coordenadas y viceversa, a toda pareja ordenada de números le corresponde un punto del plano.

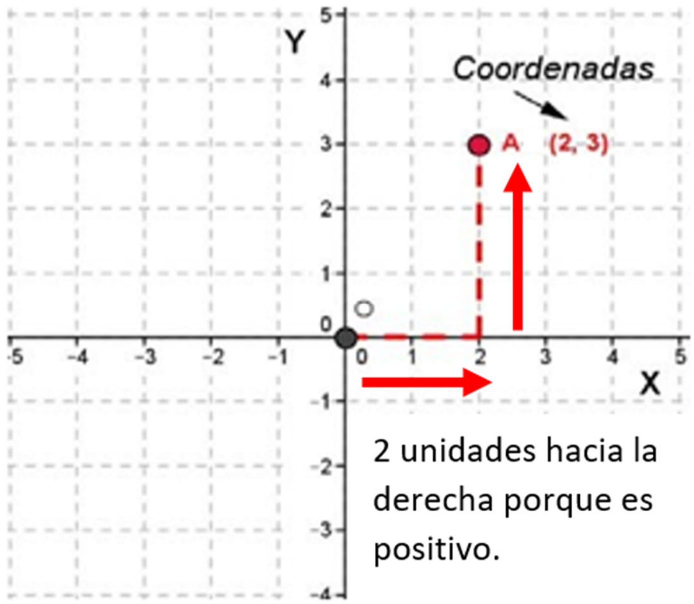
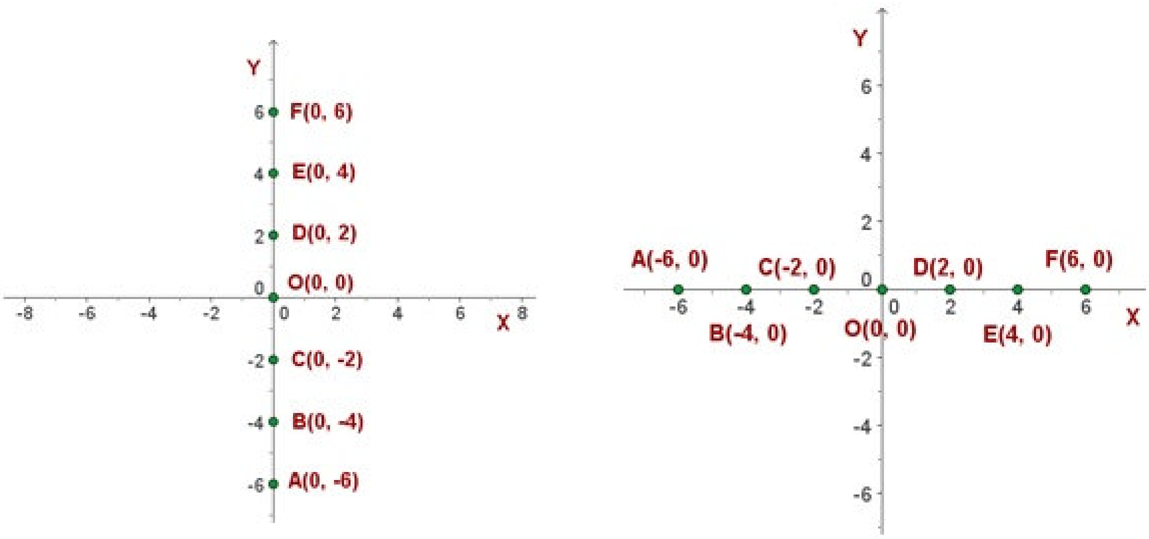


Imagen Nº 5. Coordenadas. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Es muy importante que domines todo lo relacionado con las coordenadas de los puntos. Así, debemos saber dibujar un punto en los ejes a partir de sus coordenadas y al revés, obtener las coordenadas a partir de su representación en los ejes.

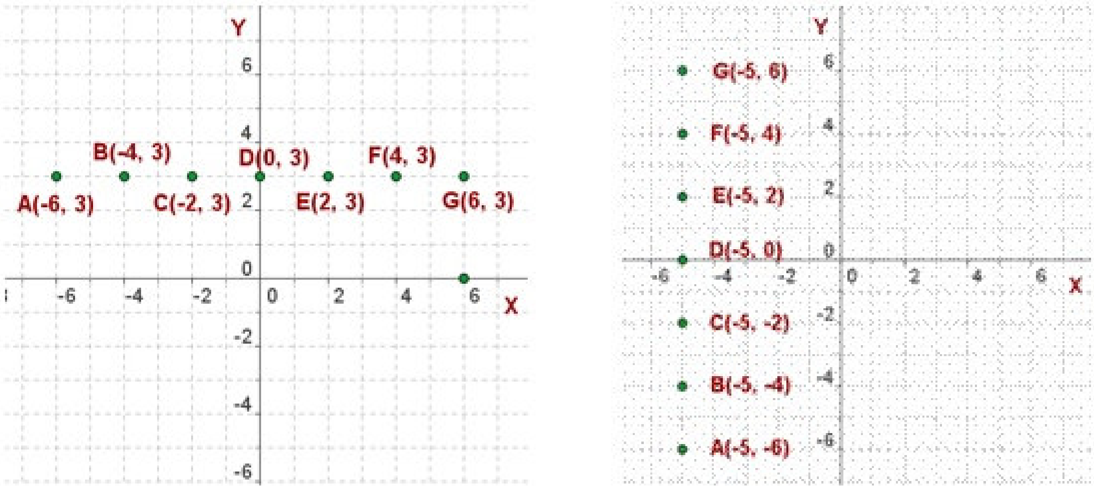
Observa ahora algunas pautas que te ayudarán a realizar esas dos tareas más rápidas:



- Los puntos situados en el eje de ordenadas tienen su abscisa igual a 0.

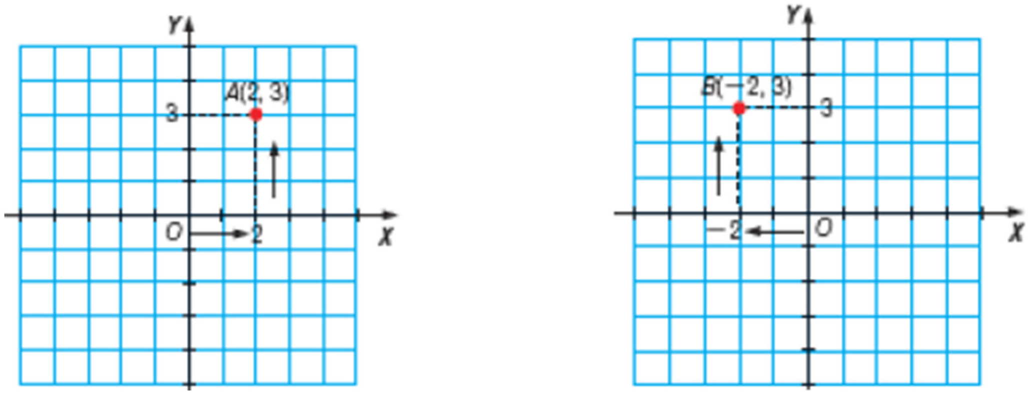
- Los puntos situados en el eje de abscisas tienen su ordenada igual a 0.

Imagen Nº 6. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

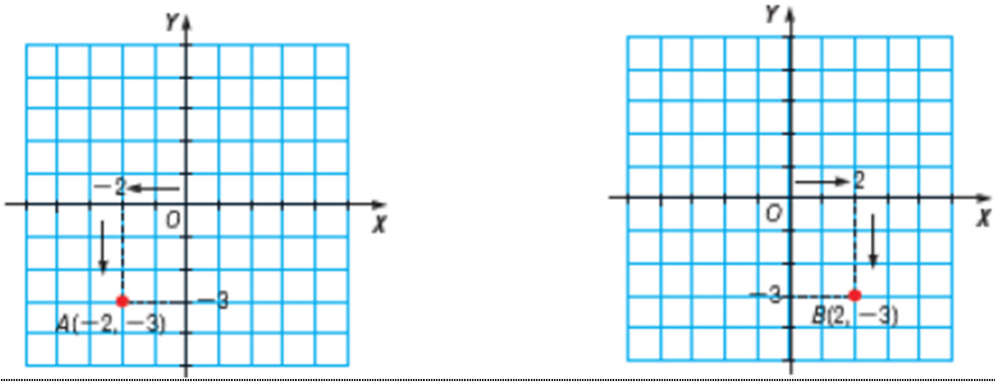


- Los puntos situados en la misma línea horizontal (paralela al eje de abscisas) tienen la misma ordenada.
- Los puntos situados en una misma línea vertical (paralela al eje de ordenadas) tienen la misma abscisa.

Imagen Nº 7. Fuente: Imagen de Elaboración Propia



- Los puntos del primer cuadrante tienen el valor de sus dos coordenadas positivas.
- Los puntos del segundo cuadrante tienen su abscisa negativa y su ordenada positiva.



- Los puntos del tercer cuadrante tienen ambas coordenadas negativas.
- Los puntos del cuarto cuadrante tienen su abscisa positiva y su ordenada negativa.

Imagen Nº 8. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Ejercicio 4:

Escribe las coordenadas de los puntos dibujados en el siguiente eje de coordenadas:

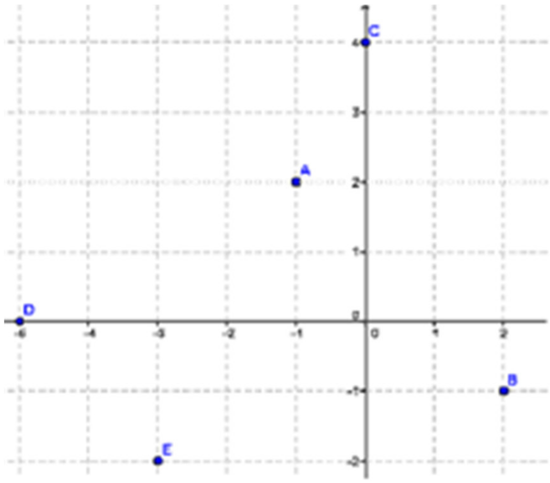


Imagen Nº 9. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Ejercicio 5:

Dibuja los siguientes puntos: A(1, 1)   B(0, 0) C(2, 0)   D(3, -3)   E(-1, -3)

2.2. Tabla de valores o de datos

Una tabla es una representación de datos, mediante P**ARES ORDENADOS** que expresan la relación existente entre dos magnitudes o dos situaciones.

La siguiente tabla nos muestra la variación del precio de las patatas, según el número de kilogramos que compremos.

Kg de patatas	1	2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10

La siguiente tabla nos indica el número de alumnos que consiguen una determinada nota en un examen.

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alumnos	1	1	2	3	6	11	12	7	4	2	1

¿Cómo se completa una tabla de datos? Hay diferentes formas. Veámoslas:

1ª. Pues bien, nosotros **a partir de una gráfica** podemos obtener su tabla de valores. No hay más que identificar puntos que pertenezcan a la gráfica y determinar cuáles son sus coordenadas. Éstas serán los pares ordenados de la tabla. Veamos cómo se hace con un ejemplo. Supongamos que nos dan la siguiente gráfica:

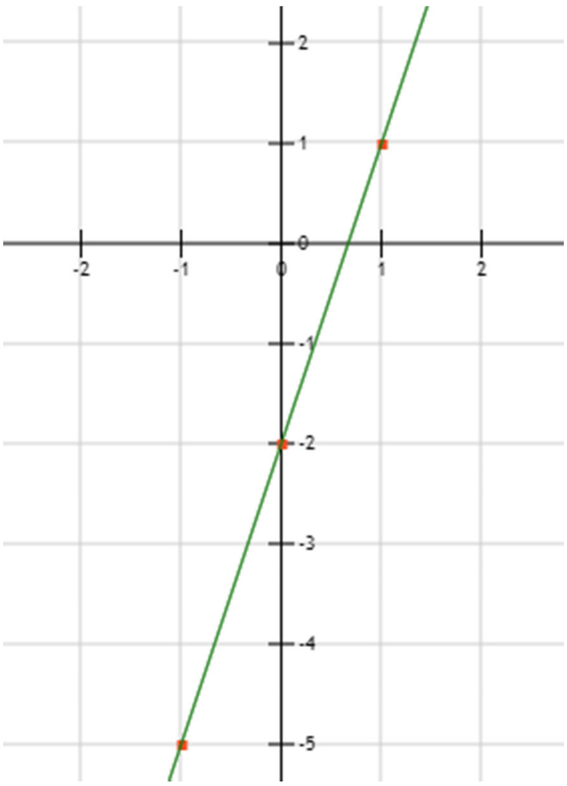


Imagen Nº 10. Gráfica. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Si nos fijamos bien nos aparecen tres puntos fáciles de localizar sus coordenadas. De izquierda a derecha serían: (-1,-5) ; (0,-2) ; (1,1).Estos tres puntos los podemos presentar en una tabla de valores como la que sigue:

x	-1	0	1
y	-5	-2	1

2ª. Cómo realizamos nuestra tabla de valores cuando en lugar de facilitarnos la gráfica nos dan la **expresión analítica o algebraica** de la función. Si continuamos con nuestro ejemplo, su expresión algebraica sería f(x)=3x-2. En este caso, lo que haremos será calcular el valor de la función para diferentes valores de x. Si no me exigen determinados valores para la x elegimos nosotros los que deseemos. ¿Cómo se hace esto?:

Si x= -1 → f(-1)= 3· (-1) -2 = -3-2 = -5 Si te das cuenta, lo que hacemos en sustituir el -1 por la x. Es decir, poner el -1 donde en la función aparece x, y después operamos. Así nos sale un par ordenado formado por: **(-1, -5)**

Si x= 0 → f(0)= 3· 0 -2= 0-2 =-2 → **(0, -2)**

Si x = 1 → f(1)= 3·1-2=3-2=1 → **(1, 1)**

Ahora ya tenemos nuestros tres pares ordenados que podemos situarlos en una tabla de valores:

x	-1	0	1
y	-5	-2	1

Ejercicio 6:

Completa los valores de la siguiente tabla:

Kg de limones	0	4		7	8	
Precio en €	0	2	5			1,5

Ejercicio 7:

Completa los valores de la siguiente tabla:

Valor	0	-2	2	1	-3	$\square$ ó $\square$	3
Valor al cuadrado	0	4	4			16	

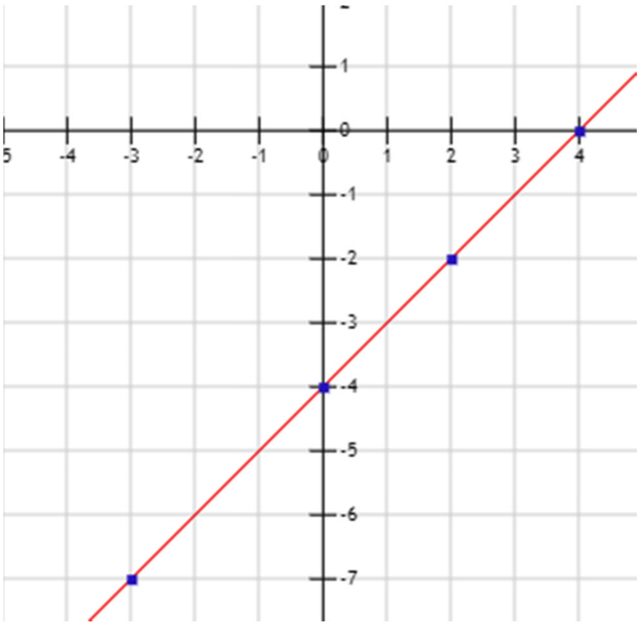
Ejercicio 8:

A partir de las siguientes expresiones algebraicas, obtén una tabla de valores de 5 puntos:

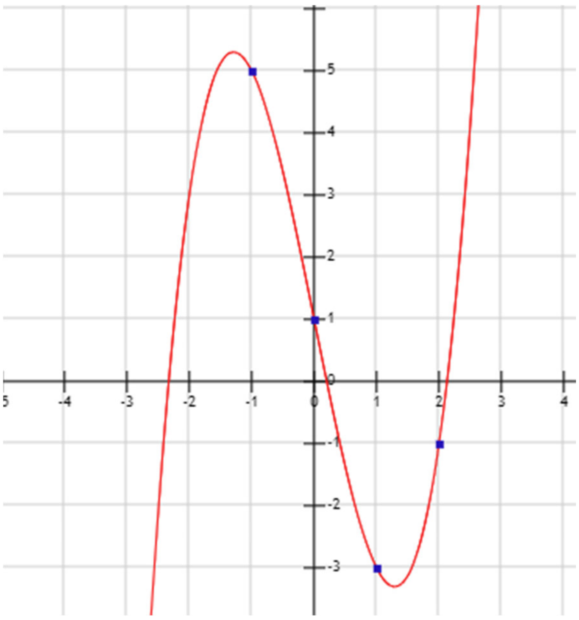
a) $f(x)= 4x-2$ b) $f(x)= x^2+ 2x - 5$

Ejercicio 9:

A partir de las siguientes gráficas, obtén una tabla de valores:



a) GRÁFICA 1



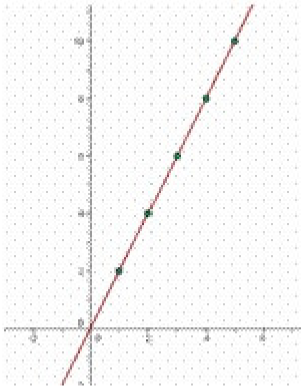
b) GRÁFICA 2

Imagen Nº 11. Gráficas. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

2.3. Gráficas

Una gráfica es la representación en unos ejes de coordenadas de los pares ordenados de una tabla. Las gráficas describen relaciones entre dos variables. La variable que se representa en el eje horizontal se llama variable independiente o variable x. La que se representa en el eje vertical se llama variable dependiente o variable y. La variable y está en función de la variable x.

Una vez realizada la gráfica podemos estudiarla, analizarla y extraer conclusiones. Para interpretar una gráfica, hemos de observarla de izquierda a derecha, analizando cómo varía la variable dependiente y, al aumentar la variable independiente, x.



Kg de patatas	1	2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10

Imagen Nº 12. Gráfica y Tabla de Datos. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

En esa gráfica podemos observar que a medida que compramos más kilos de patatas el precio se va incrementando.

Nota	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Nº de alumnos	**1**	**1**	**2**	**3**	**6**	**11**	**12**	**7**	**4**	**2**	**1**

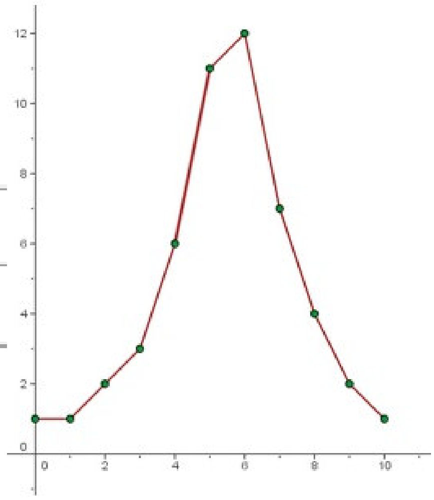


Imagen Nº 13. Gráfica y Tabla de Datos. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

En esta gráfica observamos que la mayor parte de los alumnos obtienen una nota comprendida entre 4 y 7.

Al igual que hicimos con la tabla de valores, también podemos representar gráficamente una función a partir de la expresión algebraica. Para ello, primero haremos nuestra tabla de valores, y una vez que tenemos esos pares ordenados procederemos a dibujar esos puntos en nuestros ejes cartesianos.

Ejemplo:

Imagina que nos dan la expresión de una función: f(x)=2x+1 y nos piden representarla. Primero, haremos nuestra tabla de valores, y para ello debemos calcular el valor de la función para diferentes valores de x. Valores que elegiremos nosotros.

Valor de X	Cálculo del valor de y para un valor determinado de x y = f(x)	pares ordenados
x=-1	f(-1)=2·(-1)+1=-2+1=-1	(-1,-1)
x=0	f(0)=2·0+1=0+1=1	(0,1)
x=1	f(1)=2·1+1=2+1=3	(1,3)

Ahora, hacemos nuestra tabla de valores con nuestros pares ordenados:

x	-1	0	1
y	-1	1	3

Una vez que tenemos nuestra tabla de valores, dibujamos unos ejes cartesianos y sobre él situamos nuestros puntos, teniendo siempre presente que la primera coordenada del punto corresponde con el valor en el eje X y la segunda con el del eje Y:

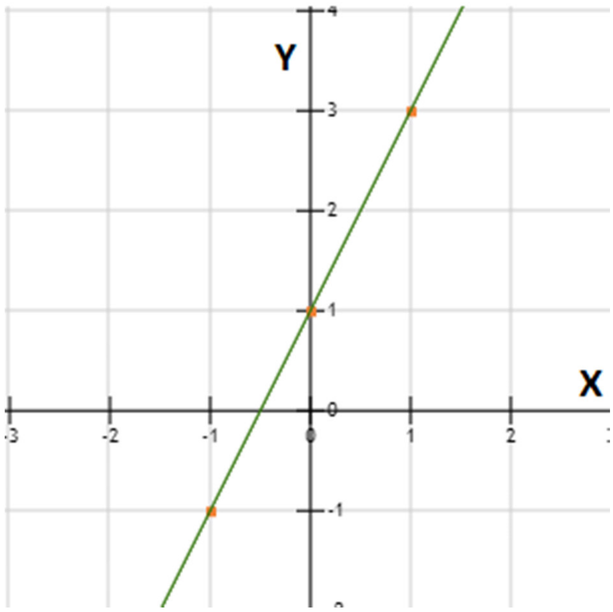


Imagen Nº 14. Gráfica. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

Ejercicio 10:

Dibuja en el plano cartesiano los valores de la siguiente tabla y, una vez dibujada, indica qué tipo de figura corresponde a la gráfica de la función:

x	-4	-2	0	1	3
$f(x)$	-10	-4	2	5	11

Ejercicio 11:

A partir de la siguiente expresión algebraica representa su gráfica: f(x)= 5x-9

2.3.1. Características de las gráficas

a) Gráfica creciente.

Una gráfica es creciente si al aumentar la variable independiente también aumenta la dependiente. Es decir, si aumenta la X también aumenta el valor de la Y.

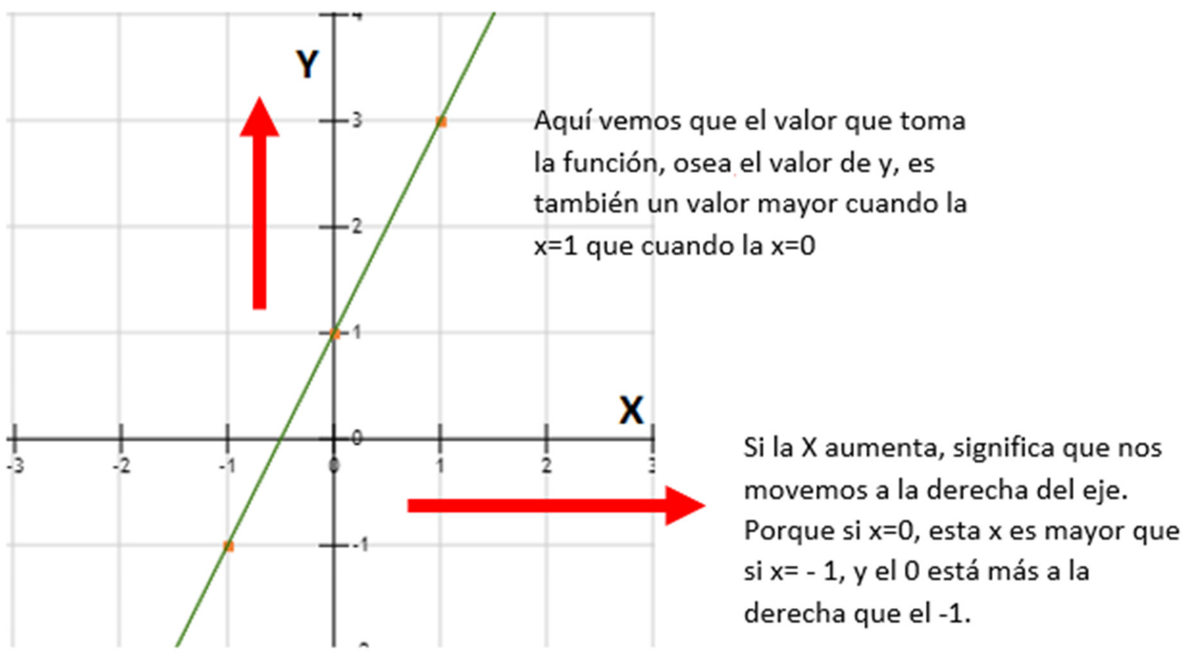


Imagen Nº 15. Gráfica Creciente. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

b) Gráfica decreciente.

Una gráfica es decreciente si al aumentar la variable independiente disminuye la otra variable. Es decir, si aumentamos el valor de la x veremos que el respectivo valor de la y es menor que el anterior.

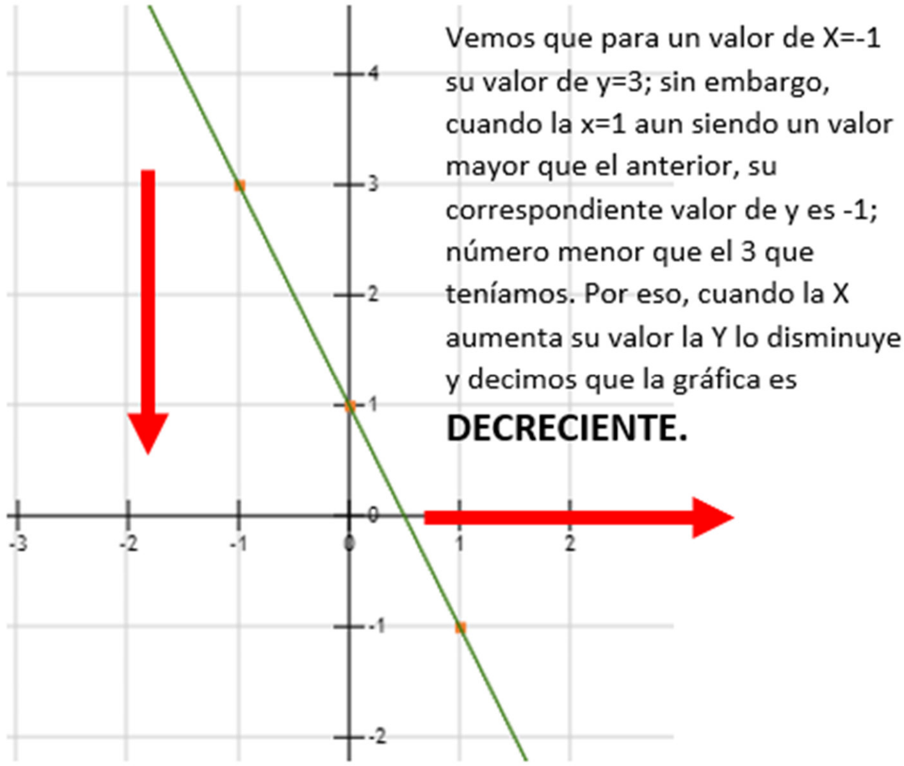


Imagen Nº 16. Gráfica Decreciente. Fuente: Imagen de Elaboración Propia

c) **Gráfica constante**.

Una gráfica es constante si al variar la variable independiente la otra permanece invariable.

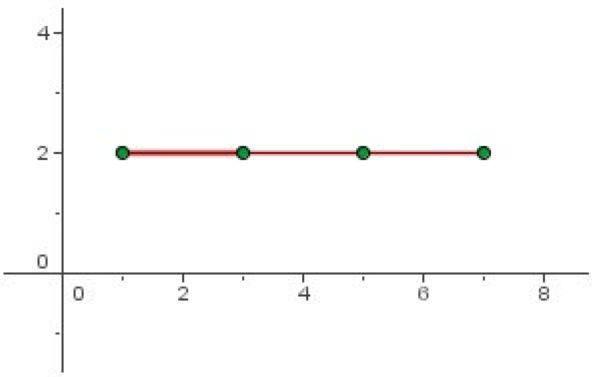


Imagen Nº 17. Gráfica Constante. Fuente: Imagen desconocida

Una gráfica puede tener a la vez partes constantes, crecientes y decrecientes.

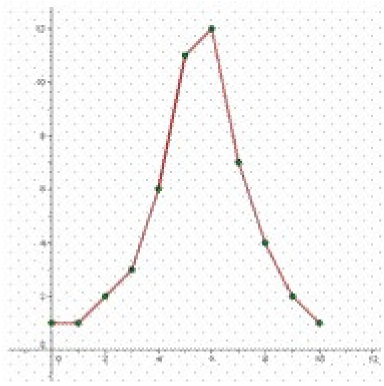


Imagen Nº 18. Gráfica. Fuente: Imagen desconocida

d) <u>Máximos y mínimos</u>.

Una función tiene un **MÁXIMO** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que están alrededor de él. A la izquierda del máximo la función es creciente, mientras que a su derecha la función decrece.

Una función tiene un **MÍNIMO** en un punto cuando su ordenada es menor que la ordenada de los puntos situados alrededor de él. A la izquierda del mínimo la función es decreciente, y a la derecha creciente.

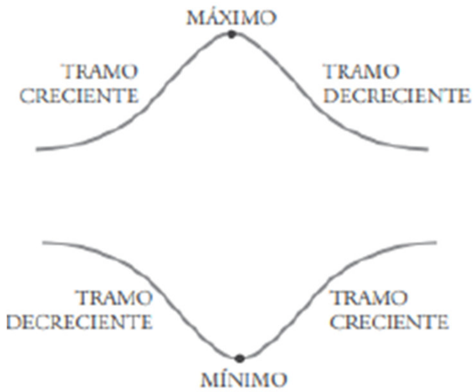


Imagen Nº 19. Máximos y mínimos. Fuente: Imagen desconocida

Por ejemplo, si tenemos una gráfica como la que hay a continuación, podemos estudiar en qué tramos la función es creciente, decreciente y si tienen máximos o mínimos.

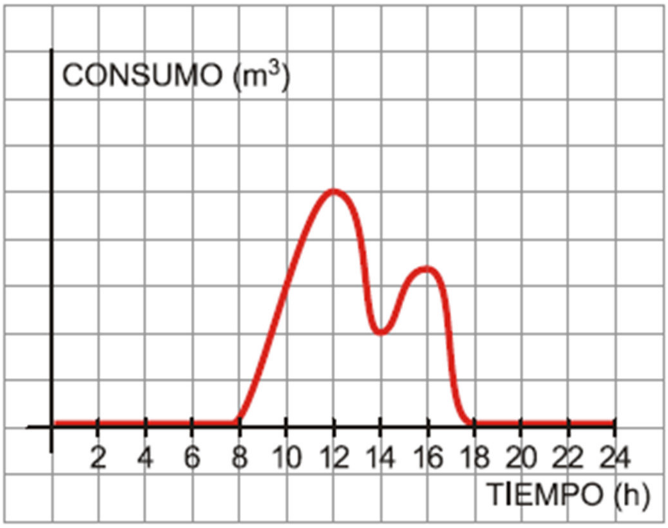


Imagen Nº 20. Gráfica.

Vemos que la gráfica presenta dos TRAMOS CONSTANTES, desde las 0h hasta las 8h y desde las 18h hasta las 24h. En ambos casos, el consumo de agua siempre se mantiene a cero. Por otro lado, tenemos otros dos TRAMOS CRECIENTES, desde las 8h a las 12h y desde las 14h a las 16h. Razonando de forma parecida, vemos que hay dos TRAMOS DECRECIENTES, desde las 12h a las 14h y desde 16h a las 18h. ¿Cómo escribimos eso de forma matemática?:

$$si\ x\ \epsilon (0,8) \cup (18,24)\ la\ funcion\ es\ CONSTANTE$$

$$si\ x\ \epsilon (8,12) \cup (14,16)\ la\ funcion\ es\ CRECIENTE$$

$$si\ x\ \epsilon (12,14) \cup (16,18)\ la\ funcion\ es\ DECRECIENTE$$

Si intentamos buscar los máximos y los mínimos, veremos que tenemos un consumo MÁXIMO de agua cuando son las 12h (consumiendo 5m^3), y corroboramos que a la izquierda de ese punto la función es creciente pero a su derecha es decreciente. Hay otro MÁXIMO a las 16h (consumiendo 3,25 m^3), pero como en esa hora el consumo es menor que a las 12 decimos que el MÁXIMO es RELATIVO. Si nos fijamos, cuando se cumplen las 14h hay un MÍNIMO (donde se consume 2 m^3), ya que a su izquierda la función decrece y a su derecha la función crece. Esto lo escribiríamos:

$$En\ x = 12\ \exists\ un\ MAXIMO \rightarrow (12{,}5)$$

$$En\ x = 16\ \exists\ un\ MAXIMO\ RELATIVO \rightarrow (16;\ 3{,}25)$$

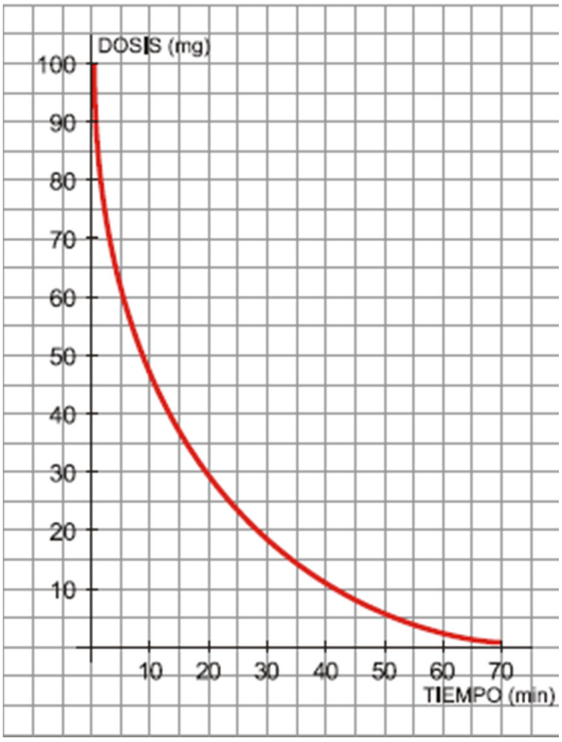
$$En\ x = 14\ \exists\ un\ MINIMO\ \rightarrow (14;\ 2)$$

e) **Continuidad y discontinuidad**.

Una función es **CONTÍNUA** cuando la variable independiente y dependiente pueden tomar todos los valores que existen en un tramo de la recta real.

Por ejemplo, si representamos el precio que pagamos por la compra de patatas al peso, vemos que podemos comprar 1kg o 2kg de patatas, pero también las patatas pueden pesar todos los valores intermedios que hay entre 1 y 2.

Sin embargo, si en lugar de comprar las patatas al peso las compramos solo por unidades, nosotros sólo podemos comprar 1 o dos patatas, pero no los valores intermedios que hay entre ambos. Entonces decimos que la función es **DISCONTÍNUA**.



• Gráfica CONTÍNUA.	• Gráfica DISCONTINUA

Imagen Nº 21. Gráficas.

Ejercicio 12:

Observa la gráfica siguiente y determina:

a) Su valor en los puntos x = -2 , x = 0   y   x = 3.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento

c) Los valores de x en los que se alcanzan puntos de máximo o de mínimo.

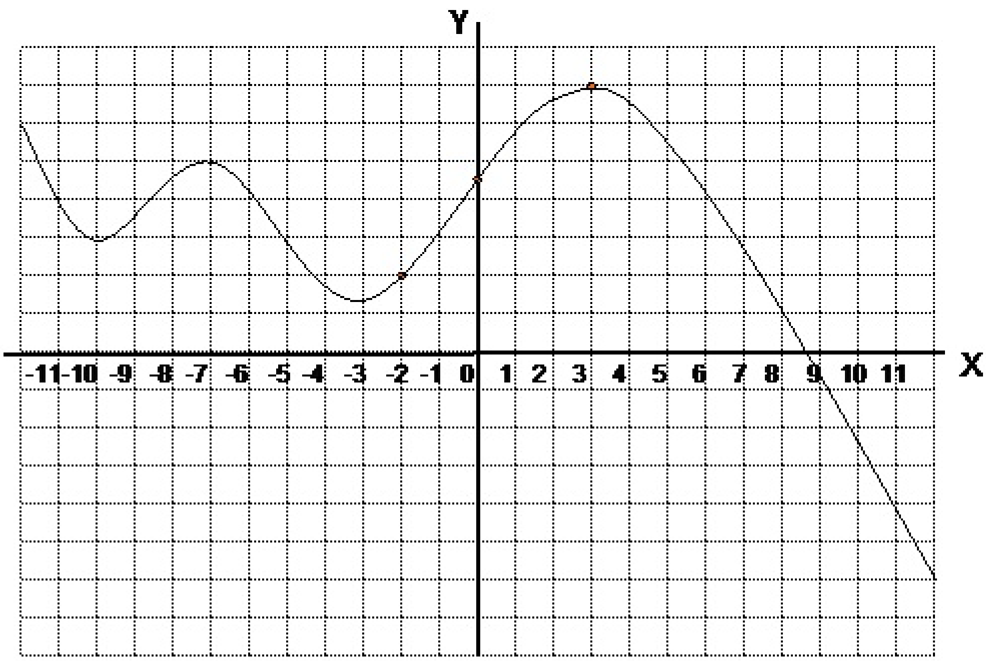


Imagen Nº 22. Gráfica.

3) Interpretación de gráficas

Interpretar una gráfica es extraer información de ella a través de su estudio, de izquierda a derecha; aplicando todo lo visto en el apartado de características de las gráficas.

Veamos cómo trabajar este apartado con un ejemplo.

Ejemplo:

Las siguientes gráficas corresponden al ritmo que han seguido cuatro personas en un determinado tramo de una carrera. Asocia cada persona con su gráfica:

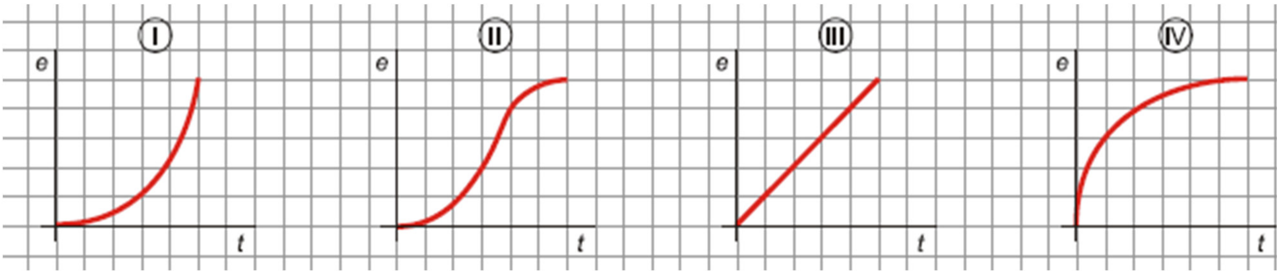


Imagen 23: Gráficas.

Mercedes: Comenzó con mucha velocidad y luego fue cada vez más despacio.

Carlos: Empezó lentamente y fue aumentado gradualmente su velocidad.

Lourdes: Empezó lentamente, luego aumentó mucho su velocidad y después fue frenando poco a poco.

Victoria: Mantuvo un ritmo constante.

La respuesta sería:

Mercedes→	IV
Carlos→	I
Lourdes→	II
Victoria→	III

Pero ¿por qué? Que hemos tenido que pensar para responder así. Para eso lo primero que tenemos que hacer es fijarnos muy bien en las magnitudes que se representan en ambos ejes. En este caso es una gráfica espacio/tiempo, esto significa que puedo ver cómo avanzan en su recorrido conforme transcurre el tiempo. Así por ejemplo, la gráfica III corresponde a alguien que siempre ha corrido a la misma velocidad porque su avance es siempre igual: cada cuadrado en el eje X se corresponde con el mismo aumento en el eje Y. Por eso es la gráfica de Victoria.

La gráfica IV corresponde a alguien que al principio corre muy rápido porque en un solo cuadrado de avance en el eje x vemos que aumenta mucho la Y pero a partir del segundo cuadrado en la x vemos que la Y no crece al mismo ritmo que al principio. Es la que le corresponde a Mercedes.

Si nos fijamos bien, la gráfica I hace justamente lo contrario, al comienzo aumenta muy poco la Y pero después sube muy rápido. La de Carlos.

Y en la gráfica II el comienzo es el mismo o muy parecido a la de la gráfica I, pero llega un momento en el que el aumento del valor en el eje Y vuelve a "relajarse". Por este motivo, es la de Lourdes.

Veamos otro estilo de ejercicio posible:

La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de estudiantes, reflejando el tiempo (en horas) y la distancia al instituto (en kilómetros):

a) ¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?

b) ¿Cuánto tiempo duró la visita al lugar?

c) ¿Hubo alguna parada a la ida? ¿Y a la vuelta?

d) ¿Cuánto duró la excursión completa (incluyendo el viaje de ida y el de vuelta)?

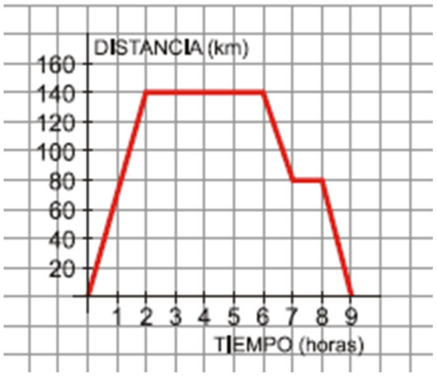


Imagen 24: Gráfica.

SOLUCIÓN:

a) Para responder tenemos que fijarnos en el eje dónde se represente la distancia, en este caso es el Y. El mayor valor que se logre en la gráfica corresponde con la distancia al lugar, en este caso 140 km.

b) Si están visitando algún sitio, mientras están allí, no se alejan del instituto por lo que la distancia al centro de 140 km se mantiene constante. Por eso debemos buscar un tramo constante alejado lo máximo posible, ese tramo es desde la hora 2 a la 6; por tanto, están 4 horas visitando el lugar.

c) Mientras que se dirigen al lugar de visita la distancia al centro debe ir aumentando hasta que lleguen. Así vemos, que ese trayecto lo hacen sin ningún tramo constante, lo que significa que no hay paradas. Sin embargo, cuando vuelven, vemos que la distancia al centro disminuye y por eso la gráfica es decreciente, pero de la 7ª hora a la 8ª, la función no decrece sino que se mantiene constante; esto significa que hacen una parada a la vuelta de 1 hora de duración.

d) Aquí debemos fijarnos en el e donde se representa el tiempo y ver cuál es la hora más alejada del principio; en nuestro caso tardan 9 horas en hacer todo el viaje.

A continuación te representamos de nuevo la gráfica indicando en qué parte de la misma debemos mirar para responder a cada apartado:

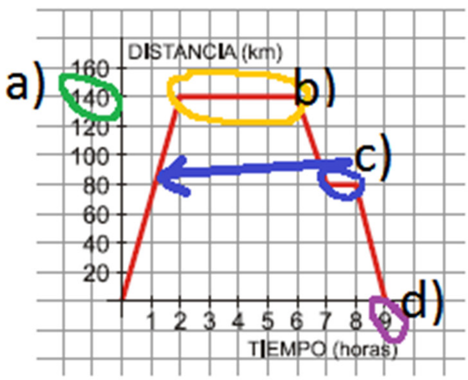


Imagen 25: Gráfica.

Ejercicio 13:

Dependiendo del día de la semana, Rosa va al instituto de una forma distinta:

- El lunes va en bicicleta.
- El martes, con su madre en el coche (parando a recoger a su amigo Luis).
- El miércoles, en autobús (que hace varias paradas).
- El jueves va andando.
- Y el viernes, en motocicleta.

a) Identifica a qué día de la semana le corresponde cada gráfica:

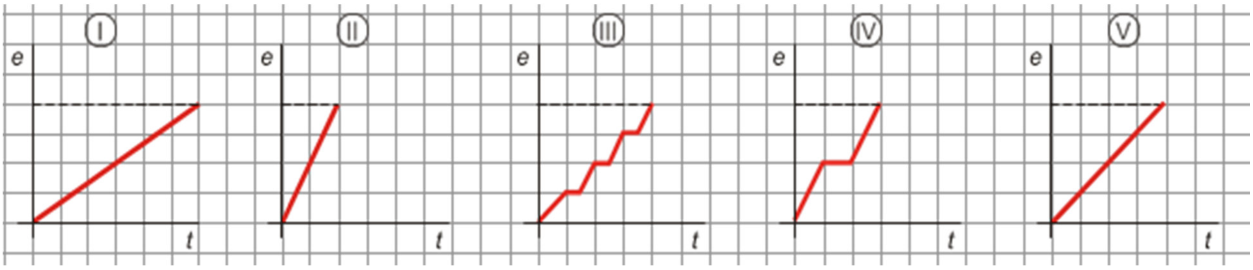


Imagen 26: Gráficas.

b) ¿Qué día tarda menos en llegar? ¿Cuál tarda más?

c) ¿Qué día recorre más distancia? Razona tu respuesta.

Ejercicio 14:

La siguiente gráfica muestra el crecimiento de una persona (midiéndola cada cinco años)

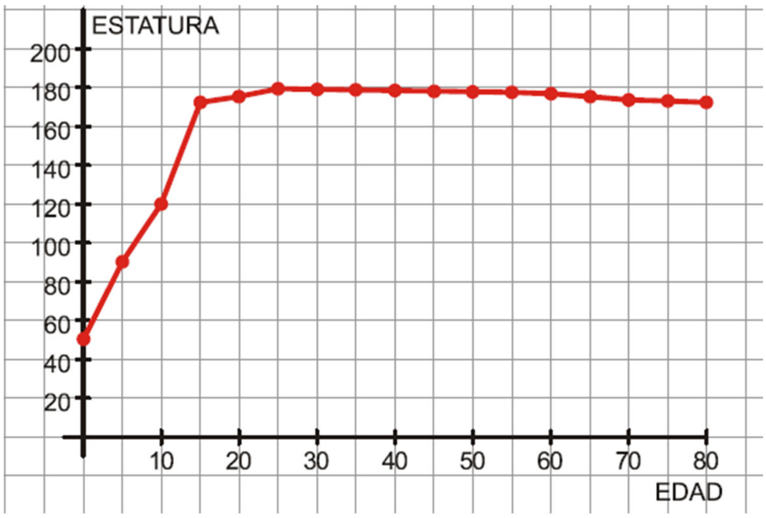


Imagen 27: Gráfica.

a) ¿Cuánto mide al nacer?
b) ¿A qué edad alcanza su estatura máxima?
c) ¿Cuándo crece más rápido?
d) ¿Cuál es el dominio?
e) ¿Por qué hemos podido unir los puntos?

4) Función lineal

Una función LINEAL es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado menor o igual a uno y su representación en una gráfica corresponde a UNA RECTA.

Existen tres tipos de funciones lineales: LA DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA o LINEAL, LA AFÍN Y LA CONSTANTE.

La función **LINEAL** O DE **PROPORCIONALIDAD DIRECTA** es del tipo: **y = mx,** la **CONSTANTE** del tipo **y = n** y la **AFÍN** es del tipo: **y = mx+n**, donde en ambos casos m y n son números reales. Si nos damos cuenta, la función lineal es un caso particular de la afín, es decir, la lineal es una función afín en la que el valor de n es cero. De forma similar, a la constante también le ocurre lo mismo, es como la afín pero el valor de m = 0.

Ejercicio 15:

Completa las tablas siguientes utilizando la función lineal que se indica en cada caso:

a) f(x) = 3x

x	-2	0	2
f(x)			

Ejercicio 16:

Completa las tablas siguientes utilizando la función lineal que se indica en cada caso:

b) f(x) = -x

x	-2	0	2
f(x)			

Ejercicio 17:

Representa gráficamente las funciones lineales de los ejercicios 15 y 16.

4.1. Función lineal o de proporcionalidad directa

Comenzaremos estudiando la **FUNCIÓN LINEAL** o de **PROPORCIONALIDAD DIRECTA**:

En estas funciones cada valor de "y" conserva una misma proporción respecto al de "x". Es decir:

$y = 3x \rightarrow$ (y es el triple de x)

$y = -2x \rightarrow$ (y es el opuesto del doble de x)

$y = x \rightarrow$ (función identidad: y es igual a x)

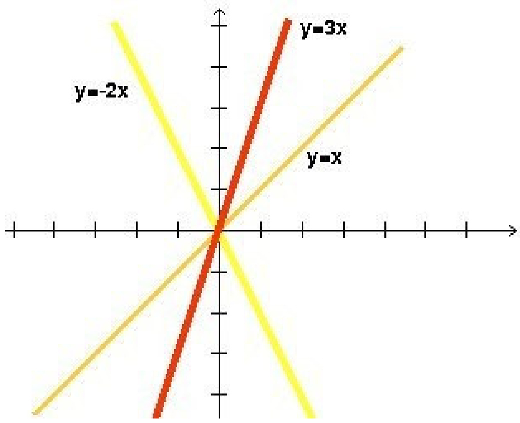


Imagen 28: Gráfica funciones lineales

Para identificar su gráfica lo tenemos muy fácil, tan sólo tenemos que darnos cuenta de que es una línea **recta que pasa por el origen de coordenadas.**

Fíjate en la siguiente función: $y = 2x$. Tenemos su tabla de valores y su gráfica:

x	0	1	2	3	4
y = 2x	0	2	4	6	8

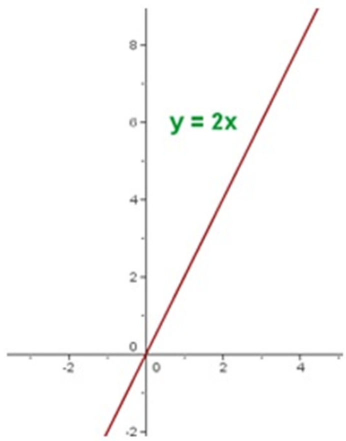


Imagen 29: Función lineal y tabla de datos.

Si nos damos cuenta, en su tabla de valores veremos que existe una relación de proporcionalidad entre el valor de la Y y el valor de la X:

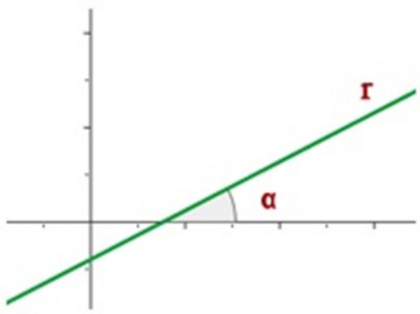
$$\frac{VALOR\ Y}{VALOR\ X}=CONSTANTE=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=2$$

Pendiente

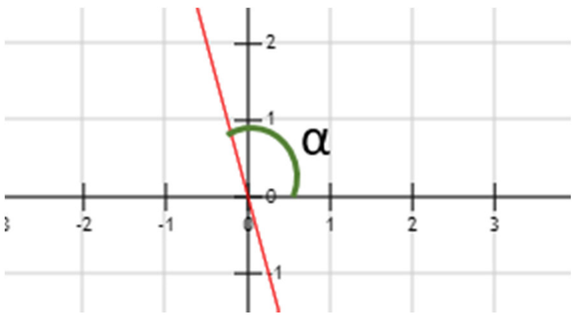
La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas. Expresa el aumento o la disminución de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente. Si la función nos la dan a través de su expresión algebraica podemos saber la pendiente fácilmente, ya que la identificamos como el coeficiente que acompaña a la X en la expresión. Así en la función y=2x el coeficiente que acompaña a la x es el 2 y por tanto la pendiente de esta función es m=2.

Observa que la pendiente la denominamos por la letra m.

Si m > 0 (esto significa: "si la pendiente es positiva") la función es CRECIENTE y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo. Sin embargo, si m < 0 (si la pendiente es negativa), la función es DECRECIENTE y ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso. En las funciones constantes, es decir, aquellas que son paralelas al eje x decimos que su pendiente es cero.



Función CRECIENTE m>0



Función DECRECIENTE m<0

Función CONSTANTE m=0

Imagen 30: Pendiente de la función lineal.

¿Qué nos indica la pendiente en una gráfica? Pues ya hemos dicho que nos informa de la inclinación de la recta. Esto implica que aunque no sepamos a primera vista cómo obtener el valor numérico de la pendiente en una gráfica, podemos decir cuál de las rectas tendrá mayor o menor pendiente en función de la misma. Por ejemplo, supongamos que nos dan la siguiente gráfica con tres rectas representadas:

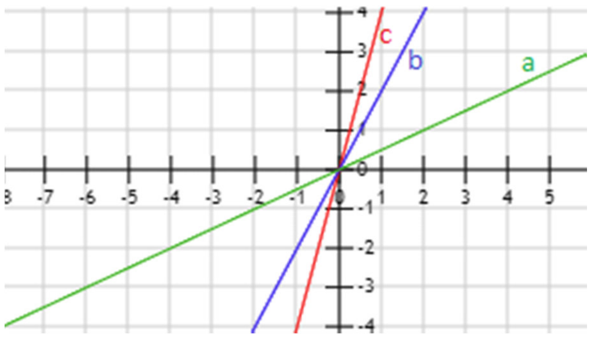


Imagen 31: Funciones lineales.

En ninguna de ellas vemos cuál es el valor numérico de su pendiente, pero podemos afirmar que como la recta c es la que tiene una mayor inclinación el valor de su pendiente será mayor que el de la b, y el de ésta mayor que el de la a. Además de decir que las tres son crecientes puesto que el ángulo que forman con la parte positiva del eje de abscisas es agudo; y por esa razón, las tres funciones lineales tendrán pendientes positivas.

Entonces, ¿no podemos saber el valor de la pendiente si no tenemos la expresión gráfica? Pues claro que podemos. Simplemente tendremos que realizar algunos cálculos. Veamos cómo.

a) CÁLCULO DE LA PENDIENTE (m) SI SÓLO TENEMOS SU GRÁFICA:

En este caso, tenemos que obtener de la gráfica las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a la recta. Con esos puntos que llamaremos A(x_1 , y_1) y B(x_2 , y_2); calculamos la pendiente aplicando la siguiente fórmula:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Aclarar que el símbolo Δ en matemáticas significa variación, por tanto, si tenemos escrito: Δy ; esto se leería como "variación de y". Esa variación representa la resta de dos cosas. Lo verás más claro con un ejemplo, si decimos que hoy la temperatura es de 23 ºC y ayer fue de 17ºC decimos que la variación de temperatura de ayer a hoy ha sido de 6 grados, porque 23-17=6. Esto llevado a las funciones, significaría la variación entre la ordenada de dos puntos pertenecientes a la recta.

Observa cómo se hace con un ejemplo:

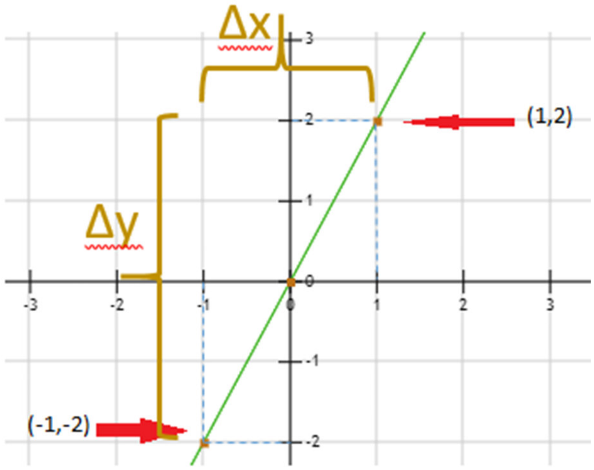


Imagen 32: Cálculo de la pendiente de una función lineal.

En la gráfica tenemos una recta creciente, es decir, con pendiente positiva, pero no sabemos cuál es su valor. Nos fijamos en la recta y escogemos dos puntos que nos resulten sencillos de obtener sus coordenadas, mirando con qué valor se corresponde ese punto para el eje X (primera coordenada) y para el eje Y (segunda coordenada). Así obtenemos los puntos: (-1,-2) y (1,2). Si aplicamos la fórmula obtenemos el valor de la pendiente, que en este caso sería m=2:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-(-2)}{1-(-1)}=\frac{2+2}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

b) CÁLCULO DE LA PENDIENTE (m) SI SÓLO TENEMOS DOS PUNTOS QUE PERTENECEN A LA RECTA:

En este caso nos ahorramos el paso de tener que mirar en la gráfica y obtener los puntos de ella. Por lo demás procederemos como antes. Al tener dos puntos podemos aplicar la fórmula de la pendiente.

RESUMIENDO:

1.- Las funciones lineales o de proporcionalidad directa son de la forma y=mx, donde m es la pendiente de la recta.

2.- Si m>0 la función es creciente

3.- Si m<0 la función es decreciente

4.- Todas las funciones lineales pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0,0) pertenece a todas las funciones lineales.

5.- Para calcular el valor de la pendiente a partir de la gráfica o a partir de dos puntos de la recta debemos aplicar:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

6.- Si nos dan la expresión algebraica de la función, la pendiente la vemos directamente en el valor del número que acompaña a la X.

Ejercicio 18:

En las siguientes funciones indica cuál es su pendiente y además en función de la misma especifica si la función es creciente o decreciente:

a) $y= 3x$ b) $y = -x$

Ejercicio 19:

En la siguiente representación indica qué tipo de funciones hay razonando matemáticamente tu respuesta y además escribe cuál de esas rectas es la de mayor pendiente justificando tu respuesta.

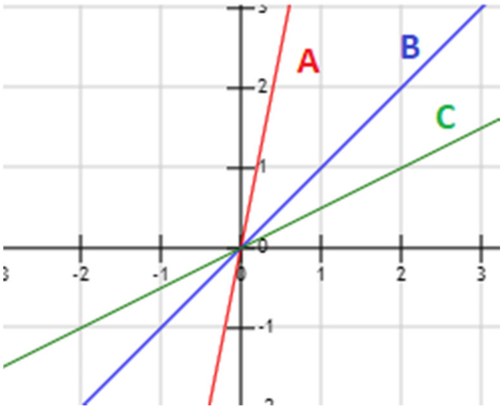


Imagen 33: Funciones lineales.

Ejercicio 20:

Calcula la pendiente de la siguiente función lineal:

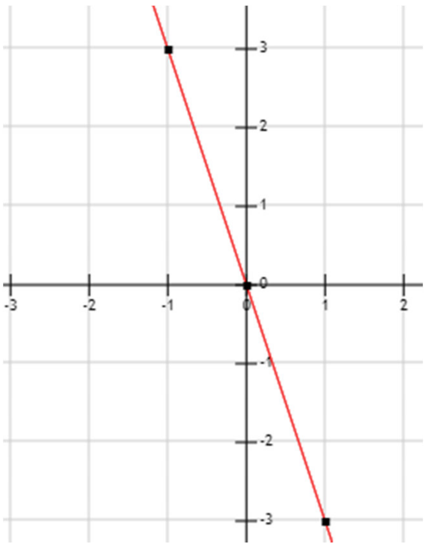


Imagen 34: Función lineal.

Ejercicio 21:

Calcula la pendiente de una recta que pasa por los puntos A(2,-4) y B(6,-1)

4.2. Función afín

La función afín es del tipo: **y = mx + n**, donde m es la pendiente de la recta y n es la **ORDENADA EN EL ORIGEN,** ésta es el punto en el que corta la recta al eje Y, y lo escribimos como un punto (0, n).

Observa en la siguiente gráfica:

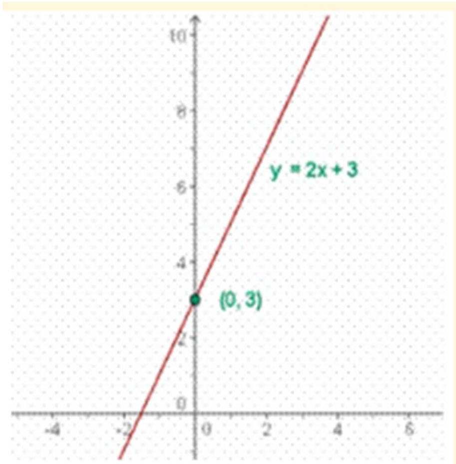


Imagen 35: Función lineal

El punto en el que la recta corta al eje Y es el punto (0,3); y este punto es la ordenada en el origen de la función y=2x+3. Si te fijas en la expresión algebraica de la función n=3 y m=2; por tanto, la pendiente de la función es 2 y la coordenada y de la ordenada en el origen es 3.

Cabe destacar que en las funciones afines no se cumple la proporcionalidad directa que hemos visto en las anteriores. Veamos un ejemplo:

Metros cúbicos de agua consumida	1	3	5	10	15	...	x
Precios de la factura sin IVA	13	19	25	40	55	...	$3x + 10$

En la tabla podemos comprobar que no se cumple una proporción directa entre los valores de y y los de x; es decir:

$$\frac{13}{1} \neq \frac{19}{3} \neq \frac{25}{5} \neq \frac{40}{10} \neq \frac{55}{15}$$

En este caso, si representamos los pares ordenados de la tabla, obtenemos la siguiente gráfica:

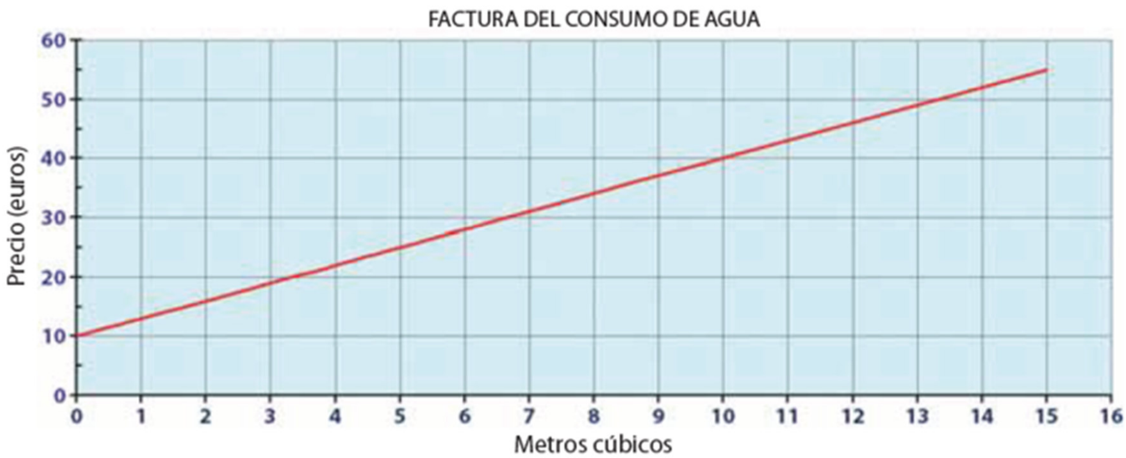


Imagen 36: Gráfica función lineal del consumo de agua.

La gráfica es una recta que comienza en el punto (0,10) y por tanto éste es la ordenada en el origen. Así podemos saber que la expresión matemática de esta función es de la forma: y=mx+10. Si interpretamos la gráfica, esto significa que con un consumo cero de agua tendremos que pagar de todos modos 10€. Por tanto, lo que pagamos por el agua no es proporcional a lo que consumimos, sino que siempre hay una cantidad fija (10€) que tendremos que pagar independientemente de lo que consumamos.

¿Cómo obtenemos el valor de m? Pues aplicando la fórmula de la pendiente que ya hemos visto. Si lo hacemos obtenemos que la pendiente es 3:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-40}{5-10}=\frac{-15}{-5}=3$$

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente y por tanto, el coeficiente que acompaña a la X será el mismo:

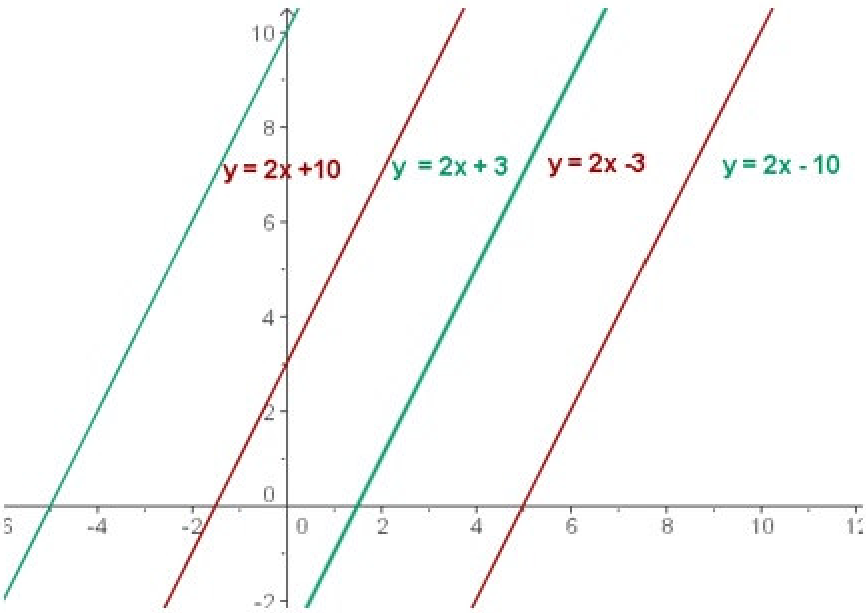


Imagen 37: Gráficas de funciones lineales paralelas.

Para representar una función afín, daremos unos valores a X y calcularemos los correspondientes valores de Y, una vez que tengamos dichos valores los representaremos en los ejes de coordenadas y uniremos los puntos con una recta.

RESUMIENDO:

1. Todas las funciones afines son de la forma y= mx+n.

2. El valor de la m es la pendiente de la recta.

3. El valor de n es la ordenada en el origen; es decir, la recta corta al eje Y en el punto (0,n)

4. Si m>0 la función es creciente; mientras que si m<0 es decreciente. (Igual que en las de proporcionalidad directa)

5. Ninguna función afín pasa por (0,0)

6. Para calcular el valor de la pendiente conocidos dos puntos pertenecientes a la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

7. Diferentes rectas serán paralelas si tienen el mismo valor de m, es decir, de la pendiente.

Ejercicio 22:

Completa las tablas siguientes utilizando la función lineal que se indica en cada caso:

a) f(x) = x -3

b) f(x) = -2x + 1

a)

x	-2	0	2
f(x)			

b)

x	-2	0	2
f(x)			

Ejercicio 23:

Escribe el valor de la pendiente y describe el crecimiento para cada una de las funciones del ejercicio 20.

Ejercicio 24:

Representa gráficamente las funciones lineales del ejercicio 22

4.3. Función constante

La función constante es una función lineal donde el valor de m es cero, y por tanto es de la forma **y=n**, y como tal, representa una recta paralela al eje de abscisas debido a que para cualquier valor de la X le corresponde siempre el mismo valor para la Y, siendo ese valor n.

Veamos, si la función es y=5 la representación será una recta paralela al eje X y que pase por el punto (0,5):

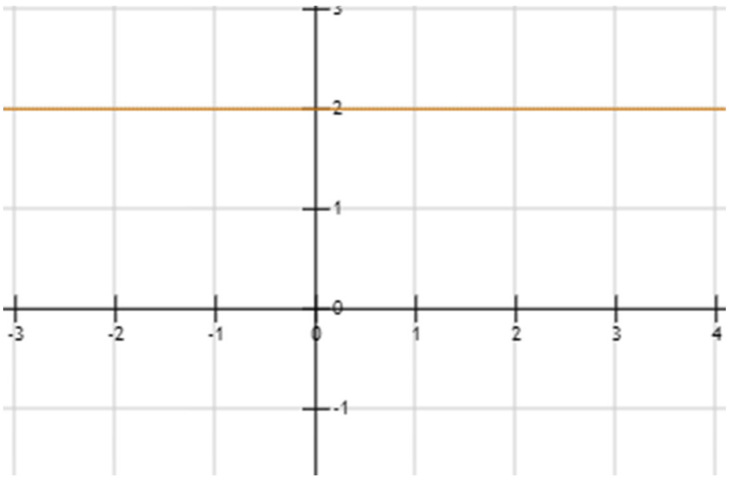


Imagen 38: Gráfica función constante.

Ejercicio 25:

Observa las siguientes funciones y responde:

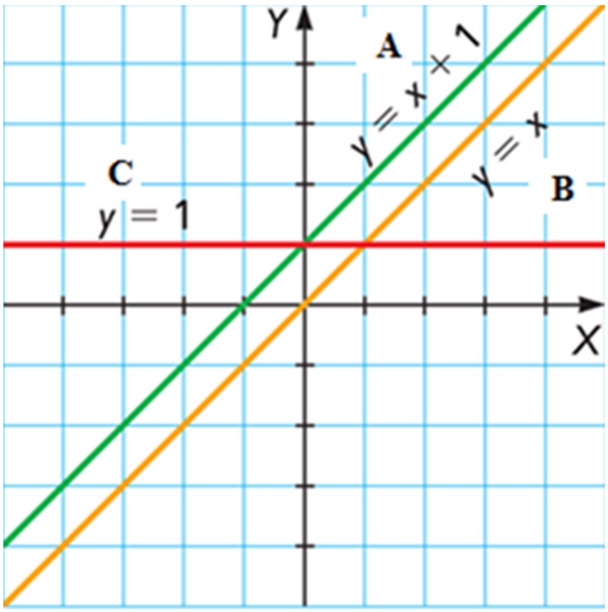


Imagen 39: Gráficas de funciones

a) ¿Qué tipo de funciones son?

A:

B:

C:

b) ¿Cuáles son paralelas? ¿Por qué?

c) Representa una función paralela a la recta A y di cuánto vale su ordenada en el origen y cuál sería su expresión algebraica.

4.4. Aplicaciones de la función lineal

Las funciones lineales y afines son ampliamente utilizadas en diferentes ámbitos científicos y de la vida cotidiana. Por ejemplo en economía se utilizan para modelar funciones de costo y de demanda; en medicina encontramos ejemplos como el experimento psicológico de Stenberg; cuando vamos a comprar pagamos en proporción a los kg de fruta que nos llevamos; a la hora de pagar un parking pagamos un fijo más la parte correspondiente al tiempo que dejamos nuestro coche; y así podríamos continuar con multitud de situaciones.

¿Cómo podemos relacionar estas situaciones con las funciones lineales? Primero debemos identificar si nuestra situación corresponde con una función lineal, constante o afín. Luego, debemos identificar cuáles serán nuestras magnitudes y quién actúa como variable dependiente y quién como independiente. Después, escribiremos la expresión de nuestra función y realizaremos los cálculos o gráficas que nos pidan.

Imagínate que nos dicen: **Estoy indeciso a la hora de elegir mi nueva compañía de móvil. La compañía A me ofrece un pago fijo de 15€ al mes más 0,05€ por cada minuto que hable. Mientras que la compañía B no me impone un pago fijo, sino sólo pagar por lo que hablo a 25 céntimos el minuto. ¿Cuál es más beneficiosa si hablo menos de 60 minutos al mes?**

Evidentemente por la "cuenta de la vieja" sabríamos responder, ¿o no? Pero vamos hacerlo con las funciones. Veamos, la variable independiente (X) serían los minutos que hablamos y el dinero que pagamos sería la variable dependiente (Y) ya que pagamos en función del tiempo que hablemos.

La compañía A me propone pagar un fijo más una pequeña cantidad por minuto que hable. Pues bien; siempre que me expongan una parte FIJA, que siempre estará independientemente de lo que consumamos o hagamos, eso quiere decir que ese FIJO, corresponderá con el término independiente de nuestra expresión analítica de la función, o lo que es lo mismo, será la n. Entonces, de momento tenemos que $y=mx+15$. ¿Cómo decido cuanto valdrá m? Pues para eso nos tenemos que centrar en lo que debemos pagar por minuto hablado. Finalmente, la función asociada a la promoción de la compañía A es: $y= 0{,}05x+15$

De forma análoga procederemos con la compañía B: $y= 0{,}25x$. Fíjate que hemos puesto 0,25 en lugar de 25. ¿Por qué?, porque debemos mantener las mismas unidades para poder comparar precios, así en lugar de dejarlo en céntimos lo expresamos en euros.

Ya tenemos nuestras dos expresiones algebraicas de las funciones que se expresan:

COMPAÑÍA A: $y= 0{,}05x + 15$

COMPAÑÍA B: $y = 0{,}25x$

Para responder matemáticamente a la pregunta procederemos de la siguiente forma: Para nosotros x=60 ya que solemos hablar menos de 60 minutos al mes. Si sustituimos la x en cada una de las funciones lo que obtenemos es el valor de cada función cuando x=60, o lo que es lo mismo, lo que tendremos que pagar a cada compañía.

COMPAÑÍA A: Si $x=60 \rightarrow f(60)= 0{,}05\cdot 60+15 = 3+15=18$€

COMPAÑÍA B: Si $x=60 \rightarrow f(60) = 0{,}25\cdot 60 = 15$€

Ahora comparamos ambos resultados, y vemos que nos resulta más económica la compañía B.

Por otro lado, ten en cuenta que una ecuación de primer grado con dos incógnitas también es una función lineal. Mira: Teniendo esta ecuación 9x+3y=18, si despejamos la y de la misma se nos quedaría:

9x+3y=18

3y=18-9x

$$y=\frac{18-9x}{3}=\frac{18}{3}-\frac{9x}{3}=6-3x$$

y = -3x +6 → FUNCIÓN AFÍN

OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA CONOCIDA LA PENDIENTE Y UN PUNTO PERTENECIENTE A ELLA:

Para ello debemos aplicar la siguiente fórmula: $\mathbf{Y - Y_0 = m\cdot(X - X_0)}$ donde m es la pendiente de la recta y X_0 e Y_0 son las coordenadas de un punto que pertenece a la recta.

Imaginemos que nos piden la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,4) y cuya pendiente es 3. Según esto m=3 y $(X_0, Y_0)=(2,4)$ simplemente sustituyendo en la fórmula:

y - 4 = 3·(x - 2)

y - 4 = 3x - 3·2

y = 3x -6 + 4

y = 3x - 2 → ECUACIÓN DE LA RECTA

Si en lugar de darnos la pendiente de la recta nos dan dos puntos pertenecientes a la misma, tan sólo tendremos que calcular la pendiente como ya vimos y después con uno de esos puntos y la pendiente realizar lo que acabamos de hacer.

EJEMPLO:

Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,4) y (1, 1):

Primero obtenemos la pendiente de la recta:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-1}{2-1}=\frac{3}{1}=3 \rightarrow m=3$$

(1,1) y m=3 → y-1=3·(x-1) ; y-1= 3x-3 ; y =3x-3+1; y=3x-2

Ejercicio 26:

Supongamos que el costo variable por unidad a la hora de producir un lapicero es de 2€ y que los costos fijos mensuales ascienden a 2200€. Suponiendo que el costo total tiene un comportamiento lineal:

a) Obtén la expresión del coste mensual en función de los lapiceros producidos.

b) ¿Cuál será el coste que representaría para la empresa la producción de 800 lapiceros en el mes?

c) Representa gráficamente esta función

Ejercicio 27:

Una fábrica asume costos de 10.000€ por cada mueble que produce. Además debe pagar 30.000€ mensuales de alquiler y 20.000€ por transportes. Cada mueble lo vende por 20.000€ y no tiene otros ingresos.

a) Establece la función de costos.

b) Establece la función de ingresos.

c) Representa ambas gráficas en un mismo eje cartesiano.

d) ¿Cuál es la pérdida cuando se producen y venden 3 muebles?

Ejercicio 28:

En una entrevista de trabajo para vendedor de revistas a domicilio, se ofrece un sueldo fijo mensual de 500 euros más 0,50 euros por cada revista vendida. Se pide:

a) Escribe la función correspondiente y el tipo de función que es.

b) ¿Qué sueldo cobrará un trabajador que ha vendido 20 revistas en el último mes?

5) Función cuadrática

Una función **CUADRÁTICA** es una función polinómica de segundo grado de la forma **$y=f(x)=ax^2+bx+c$** y cuya representación gráfica resulta ser una PARÁBOLA.

Las letras **a, b** y **c** se llaman coeficientes de la función; la letra **X** representa la variable independiente y la **f(x)** representa el valor obtenido al reemplazar **x** por algún valor, ya sabemos que la expresión **f(x)** puede sustituirse por la letra **Y**, que representa la variable independiente de la función.

Así si tenemos la función $y=2x^2+3x-10 \rightarrow a=2;\ b=3;\ c=-10$

El valor del coeficiente **a** afecta a la concavidad u orientación de la parábola. Mientras que los otros dos coeficientes, afectan a la posición que posee la parábola respecto de los ejes de coordenadas. De forma que si el valor de **b=0** significa que la parábola se encuentra sobre el eje y:

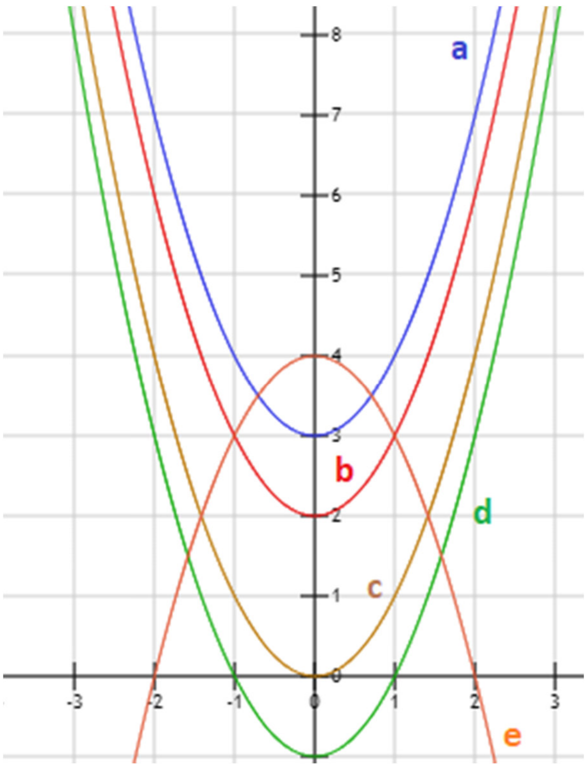


Imagen 40: Funciones cuadráticas con coeficiente b=0

Si vemos la representación asociada a cada expresión algebraica siguiente:

a: $y=x^2+3$

b: $y=x^2+2$

c: $y= x^2$

d: $y=x^2-1$

e: $y= - x^2+4$

nos damos cuenta de que en todas estas expresiones la **b=0** y en sus representaciones gráficas, el vértice está sobre el eje y cortándolo por el valor correspondiente a su n

Pensando de forma parecida, si el valor del coeficiente **c=0**, esto significa que la parábola siempre pasará por el punto (0,0). Veámoslo:

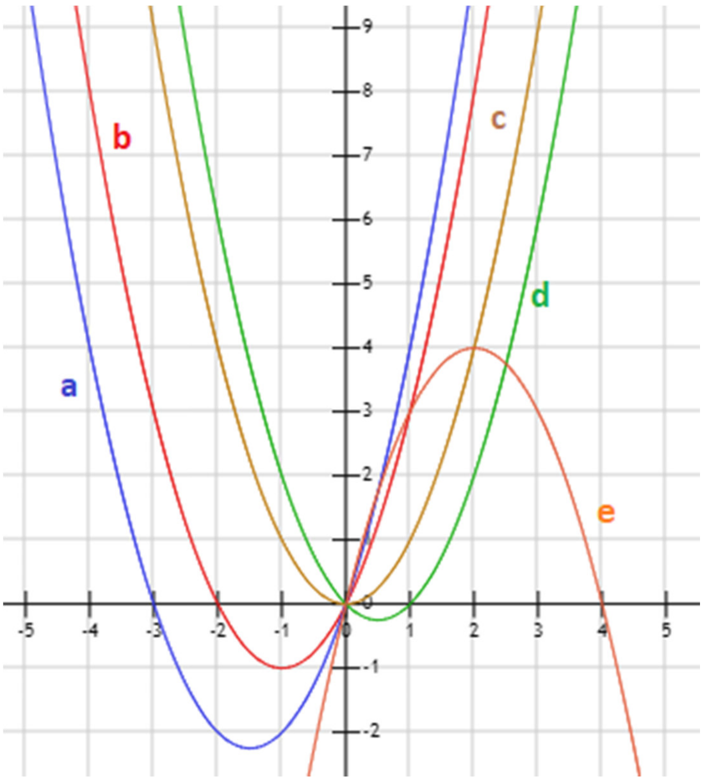


Imagen 41: Funciones cuadráticas con coeficiente c=0

Si vemos la representación asociada a cada expresión algebraica siguiente:

a: $y=x^2+3x$

b: $y=x^2+2x$

c: $y= x^2+x$

d: $y=x^2-x$

e: $y= - x^2+4x$

nos damos cuenta de que en todas estas expresiones la **c=0** y en sus representaciones gráficas, to das pasan por el punto (0,0)

Ejercicio 29:

Identifica los coeficientes a, b y c de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x)=3x^2+5x-10$ b) $f(x)= -2x^2+3x+8$ c) $y=-x^2-4x+5$

ORIENTACIÓN O CONCAVIDAD DE LA PARÁBOLA:

Como hemos dicho, cuando dibujamos la gráfica de una función cuadrática obtenemos una parábola. Esta parábola la podemos dibujar de dos posiciones:

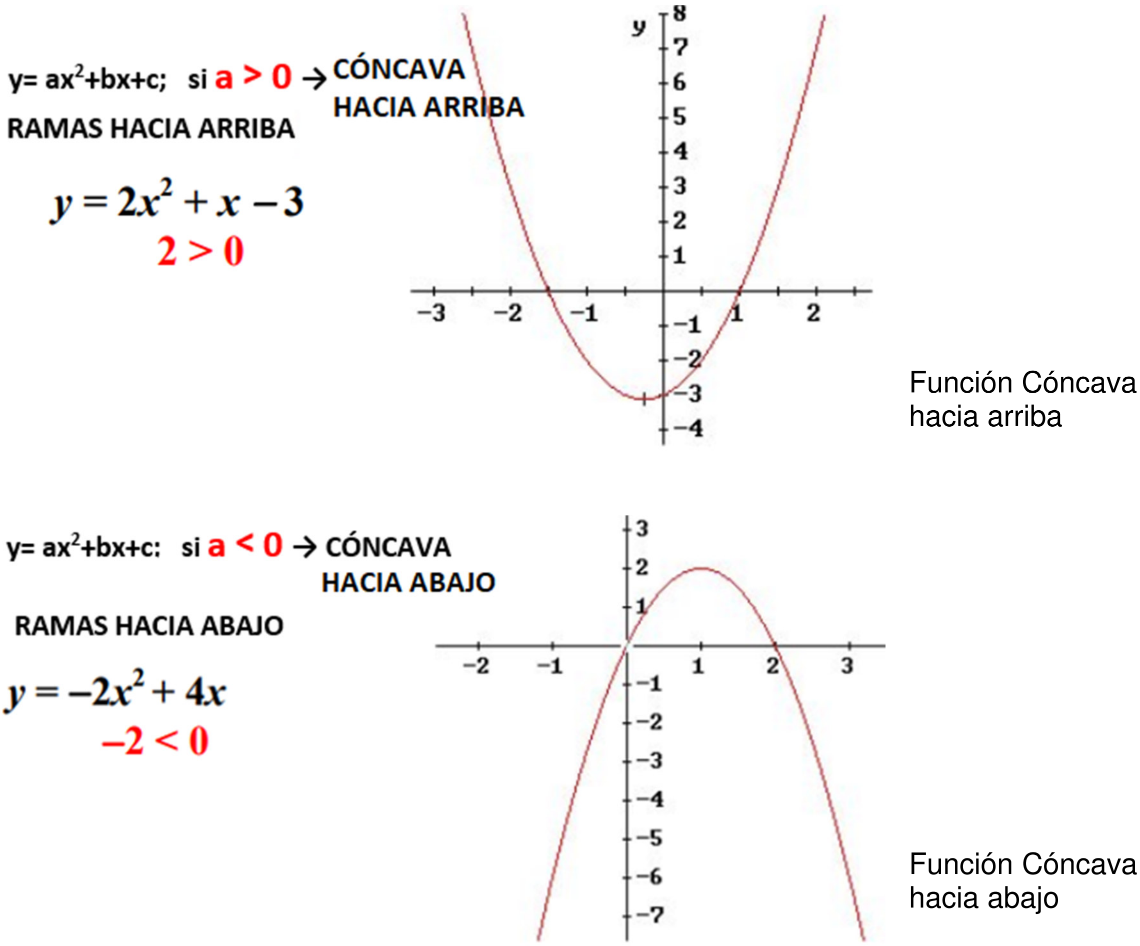


Imagen 42: Concavidad de las Parábolas.

Además, si nos fijamos en el valor del coeficiente a, veremos que cuanto mayor es su valor absoluto más estrechas o cerradas son las ramas de la parábola.

Ejercicio 30:

Identifica en las siguientes funciones cuadráticas, si su gráfica será convexa o cóncava.

Después, indica cuál de ellas presentará unas ramas más estrechas y cuál las tendrá más abiertas

a) f(x)=3x2+5x-10 b) f(x)= -2x2+3x+8 c) y=-x2-4x+5

5.1. Elementos de la parábola

En una gráfica de cualquier parábola, además de su concavidad, podemos observar los siguientes elementos:

- Eje de simetría (es una recta paralela al eje y)
- Vértice (es un punto)
- Corte con el eje Y (es un punto)
- Cortes con el eje X (puede ser dos puntos, uno o ningún punto)

Estos elementos me permiten, una vez calculados, dibujar la parábola sin tener que calcular una infinidad de puntos en una tabla de valores.

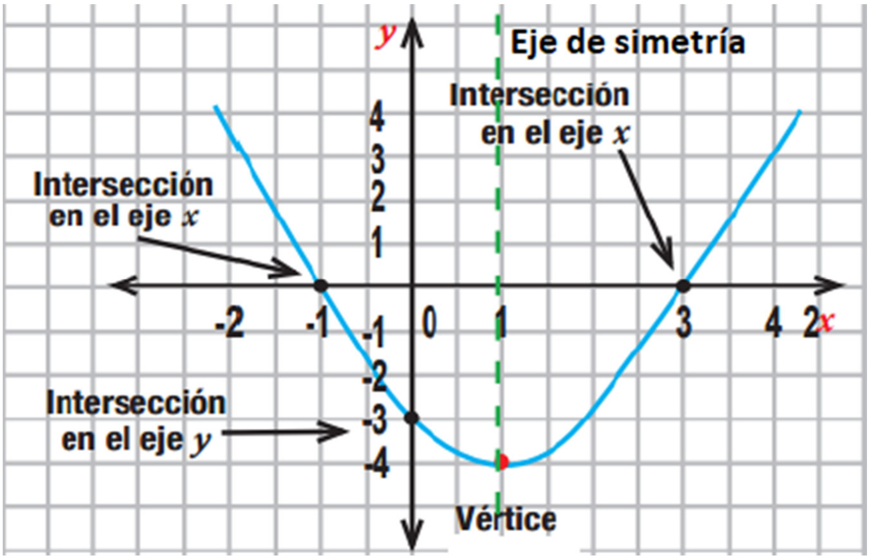


Imagen 43: Elementos de una parábola.

EJE DE SIMETRÍA:

Es una recta vertical, paralela al eje Y que divide la parábola en dos de forma que cada rama de la parábola, es el reflejo de la otra. La forma de obtener la ecuación de esta recta es:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Observa cómo podemos determinar el eje de simetría de la siguiente función: $f(x)=x^2-4x+3$.

Como a=1, b=-4 y c=3 calculamos la ecuación de la recta del eje de simetría sustituyendo en la expresión:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2\cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow x = 2$$

Por tanto, el eje de simetría de la función $f(x)=x^2-4x+3$ es x=2. CUIDADO: fíjate bien que el eje de simetría es una recta, y por tanto la tienes que escribir como tal **X=2;** y no como un número real cualquiera.

VÉRTICE:

En una función cuadrática hay una rama que crece y otra que decrece; el punto dónde se produce ese cambio lo llamamos VÉRTICE; y es el máximo o mínimo valor que toma la función según sea cóncava o convexa. Además es el punto dónde se cortan la parábola y el eje de simetría; y por tanto, comparten el mismo valor en la coordenada x. Así para calcular la coordenada del eje x del vértice usamos la misma expresión; pero además como el vértice es un punto necesitamos obtener la otra coordenada, ¿cómo?, pues calculando el valor de la función para la x_v:

$$x_v=\frac{-b}{2a};\ \rightarrow y_v=f(x_v)=ax_v^2+bx_v+c$$

Si seguimos con la función $f(x)=x^2-4x+3$:

$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2\cdot 1}=\frac{4}{2}=2\rightarrow x_v=2;\ \rightarrow y_v=f(2)=1\cdot 2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1\rightarrow v(2,-1)$$

Si vamos representando poco a poco lo que vamos calculando, de momento nuestra representación sería:

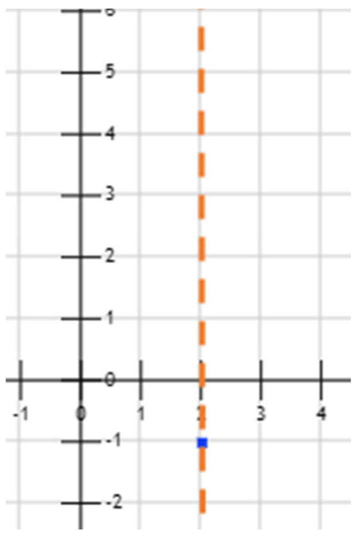


Imagen 44: Eje de simetría de una parábola.

<u>Ejercicio 31</u>:

Calcula el vértice y el eje de simetría de las siguientes funciones:

a) f(x)=x2-2x-3 b) f(x)= x2+6x+5

CORTE CON EL EJE Y:

Éste será un punto donde la parábola corta el eje de ordenadas. Para determinarlo lo que haremos será sustituir la X de la expresión de la función por el valor cero; por tanto, lo que haremos será calcular el valor de la función cuando x=0. Evidentemente, si la forma de la función cuadrática es $f(x)= ax^2+bx+c$; si $x=0 \rightarrow f(0)=a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c =0+0+ c = c$. Así pues el punto de corte con el eje y siempre será de la forma:

CORTE CON EJE y ⟶ (0,C)

Así, si continuamos con nuestro ejemplo $f(x)=x^2-4x++$ escribiríamos:

si $x= 0 \rightarrow f(0)= 0^2 -4\cdot 0+3 = 3$; por lo que el punto de corte con el eje y será (0,3).

CORTE CON EL EJE X:

Son los puntos donde la parábola corta al eje de abscisas. Para poder obtener esos puntos tenemos que igualar la función a cero, es decir, si y=0 calcular los valores de x para los que se cumple esa condición. Cuando hacemos esto, obtenemos una ecuación de segundo grado, por lo que para calcular los valores que igualan esa ecuación de segundo grado a cero tenemos que aplicar la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}$$

Como recordarás de cursos anteriores, cuando resolvemos una ecuación de segundo grado se nos pueden presentar tres casos:

- Que tenga dos soluciones. Esto ocurre cuando su discriminante (llamamos así al valor de lo que hay "dentro" de la raíz) es positivo. Es decir, $b^2-4ac >0 \rightarrow 2$ SOLUCIONES = DOS PUNTOS DE CORTE CON X→ $(X_1,0)$ y $(X_2, 0)$
- Que tenga una sola solución. Sucede si el discriminante posee valor cero. Es decir; $b^2-4ac = 0 \rightarrow 1$ SOLUCIONES = UN PUNTO DE CORTE CON X→ $(X_1,0)$
- Que NO tenga solución. Sólo ocurre cuando el valor del discriminante es negativo. $b^2-4ac < 0 \rightarrow$ NO TIENE SOLUCIONES

En el ejemplo $f(x)=x^2-4x+3$ haríamos lo siguiente:

CORTE CON x: $y=0 \rightarrow x^2-4x+3 =0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}\rightarrow x_1=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3;\quad x_2=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado que se forma son: $x_1=3$ y $x_2=1$; por tanto, los puntos de corte con el eje x serán: (3,0) y el (1,0)

CUIDADO: Fíjate bien que la forma que tienen los puntos de corte con el eje x tienen la coordenada del eje y cero: **$(X_1,0)$ y $(X_2, 0)$ CORTE CON EL EJE X**

TABLA DE VALORES DE UNA PARÁBOLA:

Antes de representar una función cuadrática debemos ordenar los datos que hemos ido obteniendo y la mejor manera de hacerlo es con una tabla de valores. Para poder representarla lo más fielmente posible necesitaremos al menos cinco valores, dos correspondientes a cada rama y otro que sería el vértice. Pero qué pasa si no tenemos suficientes puntos de la parábola, o si nos piden más puntos de los que podemos calcular. Pues entonces procedemos como en las funciones lineales, vamos calculando diferentes valores de la función para diferentes valores de X. Lo único que debemos procurar es buscar valores de X que estén a ambos lados del eje de simetría, porque si no es así sólo podremos dibujar una rama correctamente.

Veamos, en la función con la que estamos trabajando $f(x)=x^2-4x+3$ hemos obtenido los siguientes datos:

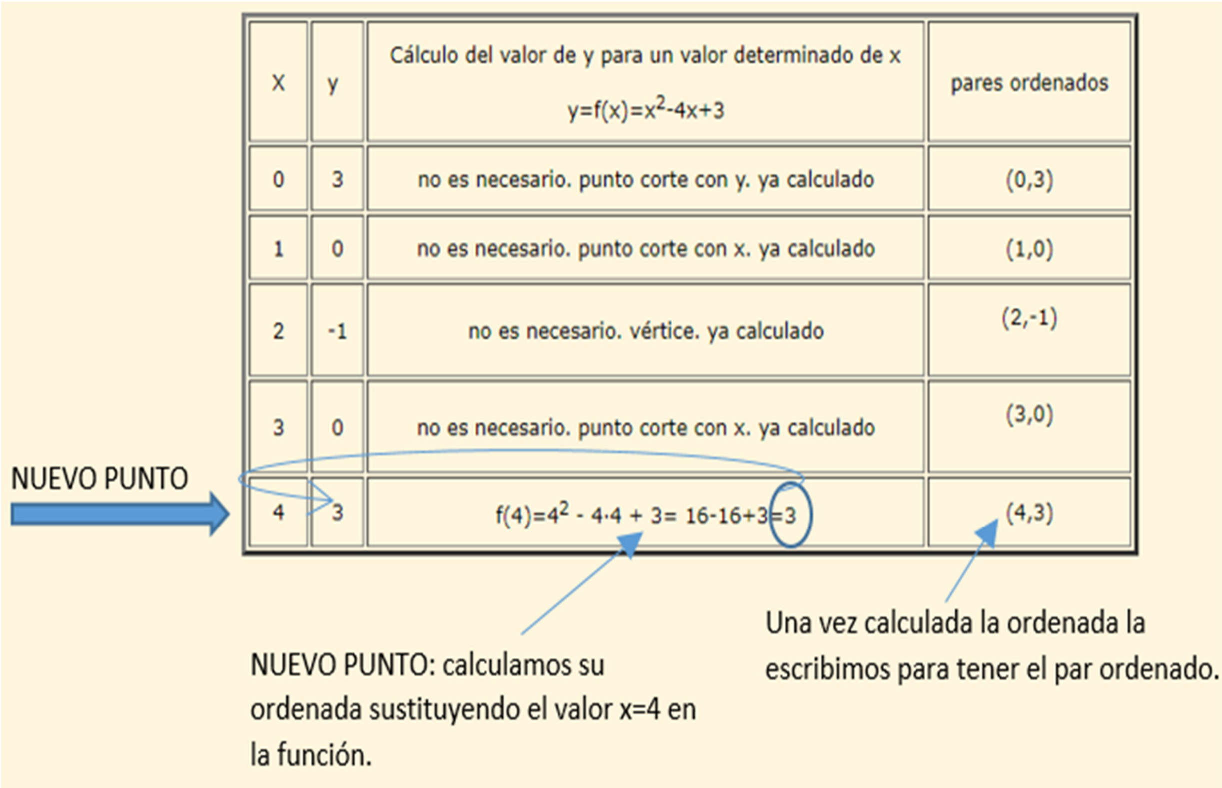
- EJE DE SIMETRÍA → x= 2
- VÉRTICE → V(2,-1)
- CORTE CON EJE Y → (0,3)
- CORTE CON EJE X → (3,0) y (1,0)

Si ordenamos estos puntos en una tabla de valores vemos que sólo tenemos cuatro valores, si pudiéramos dibujar siete valores nos resultaría más sencillo trazar las ramas de la parábola. Veamos cómo se nos quedaría la tabla de valores:

X	y	Cálculo del valor de y para un valor determinado de x y=f(x)	pares ordenados
0	3	no es necesario. punto corte con y. ya calculado	(0,3)
1	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(1,0)
2	-1	no es necesario. vértice. ya calculado	(2,-1)
3	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(3,0)

VÉRTICE

Cómo elegir los valores de x para completar una tabla de siete pares ordenados. Pues una opción es fijarnos en la coordenada x del vértice (en nuestro caso, esta coordenada es $x_v=2$); si ordenamos en la tabla de valores, las x de menor a mayor, observamos que tenemos dos puntos por debajo pero sólo uno mayor que x=2. Así que elegiremos un valor de x mayor de 2; por ejemplo x=4:



X	y	Cálculo del valor de y para un valor determinado de x $y=f(x)=x^2-4x+3$	pares ordenados
0	3	no es necesario. punto corte con y. ya calculado	(0,3)
1	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(1,0)
2	-1	no es necesario. vértice. ya calculado	(2,-1)
3	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(3,0)
4	3	$f(4)=4^2 - 4\cdot 4 + 3= 16-16+3=3$	(4,3)

Ya tenemos cinco puntos de la parábola, pero dijimos anteriormente que es mucho mejor tener al menos siete puntos, así que nos faltarían dos más. Lo suyo es intentar elegir uno de cada rama. Por eso, podemos optar por x=-1; que estaría por debajo del valor de la coordenada $x_v=2$ y por x=5 que estaría por encima. Realizando los cálculos de forma similar, tendríamos:

X	y	Cálculo del valor de y para un valor determinado de x $y=f(x)=x^2-4x+3$	pares ordenados
-1	8	$f(-1)= (-1)^2 -4\cdot(-1) +3= 1+4+3=8$	(-1,8)
0	3	no es necesario. punto corte con y. ya calculado	(0,3)
1	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(1,0)
2	-1	no es necesario. vértice. ya calculado	(2,-1)
3	0	no es necesario. punto corte con x. ya calculado	(3,0)
4	3	$f(4)=4^2 - 4\cdot 4 + 3= 16-16+3=3$	(4,3)
5	8	$f(5)= 5^2 -4\cdot 5 +3= 25 - 20 +3=8$	(5,8)

REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA:

Ya sabemos que su gráfica tiene forma de parábola, así pues lo primero que haremos será llevar a unos ejes de coordenadas todos los puntos que tenemos y hemos calculado y que pertenecen a la misma; y luego los uniremos formando dos ramas a partir del vértice dándoles cierta curvatura:

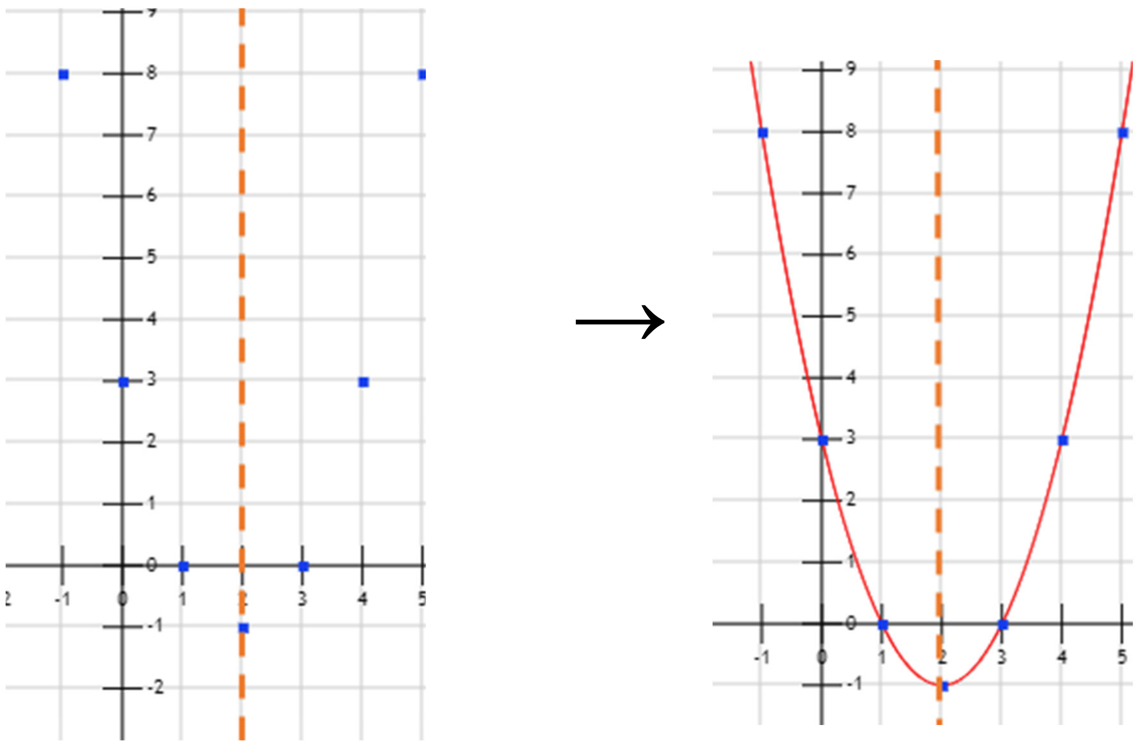


Imagen 45: Representación de una función cuadrática.

<u>Ejercicio 32</u>:

Observa la función cuadrática siguiente: $y = x^2 - 4x + 3$. Se pide:

a) Eje de simetría

b) Vértice.

c) Puntos de corte con el eje y.

d) Puntos de corte con el eje x.

e) Tabla con siete valores.

f) Representarla.