

Bloque 4. Tema 2.

Algebra II. Ecuaciones de primer grado.

ÍNDICE

- 1) Ecuaciones de primer grado.
 - 1.1. Pasos para resolver una ecuación de primer grado
 - 1.2. El lenguaje algebraico
 - 1.3. Resolución de problemas mediante ecuaciones
- 2) Identidades notables
 - 2.1. Cuadrado de la suma
 - 2.2. Cuadrado de la diferencia
 - 2.3. Suma por diferencia
- 3) Representación gráfica
 - 3.1. Ejes de coordenadas cartesianas
 - 3.2. Representación en un sistema de ejes de coordenadas
 - 3.3. Representación gráfica de una tabla de valores

Introducción.

Ya sabemos que una **expresión algebraica** es aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones para reflejar, de forma generalizada, la relación que existe entre varias magnitudes y poder así realizar un cálculo de esa relación en función de los valores que tomen las diferentes magnitudes. Observa los siguientes ejemplos de expresiones algebraicas:

Diferencia de dos números: $a - b$

Doble de un número menos triple de otro: $2x - 3y$

Suma de varias potencias de un número: $x^4 + x^3 + x^2 + x$

Actividad 1

Ten en cuenta que una expresión algebraica es como una máquina de fabricar valores. Para cada número que se introduce, "fabrica" un valor numérico diferente. Por lo tanto el **valor numérico** depende del valor que asignemos a las letras en cada momento.

¿Cuál será el valor numérico de la expresión algebraica siguiente cuando le asignamos a la x los valores 10 y -2?

$$\underline{2x^2 + 6x + 21}$$

Actividad 2

Calcula el valor numérico de la siguiente expresión algebraica para los valores de las letras que se indican:

$$x^2 - 4x + 2 \text{ para } x = -1$$

Recuerda la importancia de poner paréntesis al sustituir para no cometer errores

Actividad 3

Calcula el valor numérico de la siguiente expresión algebraica para los valores de las letras que se indican:

$$-3x^2 + xy - 2y \text{ para } x = -1, y = 3$$

Recuerda la importancia de poner paréntesis al sustituir para no cometer errores

1) Ecuaciones de primer grado.

Recuerda que no siempre se conoce el valor de todos los elementos de una igualdad. Cuando eso ocurre se nos origina una **ecuación**, que es una igualdad con números y letras que expresa una condición que deben cumplir esas letras para ser cierta. A las letras que aparecen en la ecuación se les llama **incógnitas**.

Las ecuaciones con una sola letra con exponente 1 se conocen como ecuaciones de primer grado.

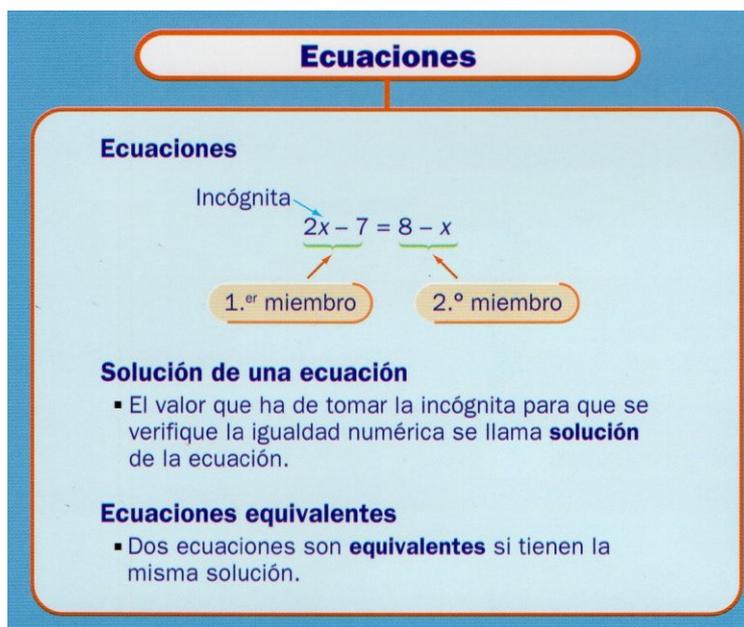


Imagen nº 1: Elementos ecuaciones

1.1. Pasos para resolver una ecuación de primer grado

1- Eliminación de denominadores:

Si existen denominadores se eliminarán aplicando el procedimiento del mínimo común múltiplo (m.c.m). Es decir, se halla el mínimo común múltiplo de todos los denominadores y éste se divide entre cada denominador antiguo, multiplicando después ese resultado por su respectivo numerador.

$$\frac{x}{4} + \frac{5}{2} - \frac{x}{6} = 5$$

Calculamos el m.c.m de los denominadores (2, 4 y 6), cuyo valor es 12. Ahora multiplicamos todos los numeradores por el m.c.m.

$$\frac{12x}{4} + \frac{12 \cdot 5}{2} - \frac{12x}{6} = 12 \cdot 5$$

A continuación quitamos los denominadores realizando las divisiones:

$$3x + 30 - 2x = 60$$

Una vez eliminados los denominadores, se continúa con los siguientes pasos.

2- Eliminación de paréntesis:

Si existen paréntesis se opera para eliminarlos, teniendo buen cuidado de ir multiplicando los signos correspondientes. Para ello hay que tener en cuenta las reglas de los signos para la multiplicación:

$$(+)\cdot(+)=(+)$$

$$(-)\cdot(-)=(+)$$

$$(+)\cdot(-)=(-)$$

$$(-)\cdot(+)=(-)$$

Ejemplo:

$$9(x-5)-1(x-5)=4(x-1)$$

$$9x-45-x+5=4x-4$$

3- Trasposición de términos:

Se adopta el criterio de dejar en un miembro los términos que posean la incógnita y se pasan al otro miembro los demás. La trasposición de términos se rige por:

- Regla de la suma: si se suma o se resta a los dos miembros de una ecuación el mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.

Esta regla de la suma se entiende más fácilmente diciendo "lo que está en un miembro sumando, pasa al otro miembro restando y viceversa".

- Regla del producto: si se multiplica o divide los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

Al igual que antes, la regla del producto se aplica directamente al decir "lo que está en un miembro multiplicando, pasa al otro miembro dividiendo y viceversa"

Si continuamos con el ejemplo anterior:

$$9x - 45 - x + 5 = 4x - 4$$

Agrupo los términos con x en el primer miembro y los términos independientes (sin x) en el segundo:

$$9x - x - 4x = 45 - 5 - 4$$

4- Simplificamos:

Reduzco términos semejantes haciendo las operaciones con los términos:

$$\begin{aligned} 8x - 4x &= 40 - 4 \\ 4x &= 36 \end{aligned}$$

5- Despejamos la incognita:

Como el 4 está multiplicando a x, pasa al otro miembro dividiendo:

$$x = \frac{36}{4} = 9$$

Ejemplos de resolución de ecuaciones:

a) $3x - 4 = 24 - x$

Agrupo las x en el primer miembro y los números en el segundo:

$$3x + x = 24 + 4$$

Reduzco los términos y despejo la incógnita:

$$\begin{aligned} 4x &= 28 \\ x &= \frac{28}{4} = 7 \end{aligned}$$

b) $3 * (x-7) = 5 * (x-1) - 4x$

Primero eliminamos paréntesis:

$$3x - 21 = 5x - 5 - 4x$$

Agrupamos las x en el primer miembro y los números en el segundo:

$$3x - 5x + 4x = 21 - 5$$

Reduzco términos y despejo la incógnita:

$$\begin{aligned} 2x &= 16 \\ x &= \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

$$c) \frac{7+x}{3} = -\frac{x-2}{6}$$

Primero hallamos el m.c.m. de los denominadores $(6,3) = 6$

Ahora multiplicamos los numeradores por el valor del m.c.m., poniendo paréntesis si es necesario y teniendo cuidado con los signos:

$$\frac{6 * (7 + x)}{3} = -\frac{6 * (x - 2)}{6}$$

Quitamos los paréntesis y realizamos la división, eliminando así los denominadores:

$$\frac{42 + 6x}{3} = -\frac{6x - 12}{6}$$

$$14 + 2x = -x + 2$$

Ahora agrupamos y despejamos la incógnita:

$$2x + x = -14 + 2$$

$$3x = -12$$

$$x = -\frac{12}{3} = -4$$

1.2. El Lenguaje algebraico

La parte realmente práctica de todos los contenidos estudiados hasta ahora, consiste en traducir problemas de la vida cotidiana a un lenguaje matemático para poder resolverlos. En general llamamos incógnita a la cantidad que desconocemos y que es objeto de cálculo y la identificamos habitualmente con la letra “x” (aunque puede utilizarse cualquier letra).

Ejemplos:

El doble de un número: $2x$

La mitad de un número: $\frac{a}{2}$

El doble de un número más ese mismo número: $2x + x$

El triple de un número menos la cuarta parte de otro número: $3x - \frac{y}{4}$

Actividad 4

Expresa en lenguaje algebraico las siguientes expresiones. El cuadrado de un número.

- El cuadrado de un número.
- El cubo de un número más el doble del mismo número.
- Un número par.
- Un número impar.
- Dos números enteros consecutivos.

1.3. Resolución de problemas mediante ecuaciones

Para resolver problemas mediante ecuaciones es conveniente seguir los siguientes pasos:

- 1- **Leemos el enunciado con atención.**
- 2- **Expresamos la información en lenguaje algebraico.**
- 3- **Planteamos la ecuación.**
- 4- **Resolvemos la ecuación.**
- 5- **Comprobamos el resultado.**

Ejemplo resuelto: Pedro tiene 14 años, y su hermana Ana 2. ¿Cuántos años deben de transcurrir para que la edad de Pedro sea el triple que la de su hermana Ana?

- Leemos el problema con atención e interpretamos la información.
- Expresamos la información en lenguaje algebraico:

Años que tienen que pasar: x

Edad de Pedro dentro de x años: $14 + x$

Edad de Ana dentro de x años: $2 + x$

- Planteamos la ecuación:

$$14 + x = 3(2 + x)$$

- Resolvemos la ecuación:

$$14 + x = 6 + 3x \Rightarrow 14 - 6 = 3x - x \Rightarrow 8 = 2x \Rightarrow x = 4$$

- Comprobamos que el resultado sea correcto:

$$14 + 4 = 3(2 + 4) \Rightarrow 18 = 3(6) \Rightarrow 18 = 18$$

2. Identidades notables

Denominamos **Identidades o igualdades notables** a diversas expresiones algebraicas que aparecen con frecuencia en el álgebra. El conocimiento de estas expresiones nos permitirá resolver diversos problemas de una forma mucho más rápida y eficaz.

De entre todas las igualdades notables destacamos tres: Cuadrado de la suma, cuadrado de la diferencia y suma por diferencia.

2.1. Cuadrado de la suma

El **cuadrado de la suma** de dos monomios a y b , es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo monomio.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

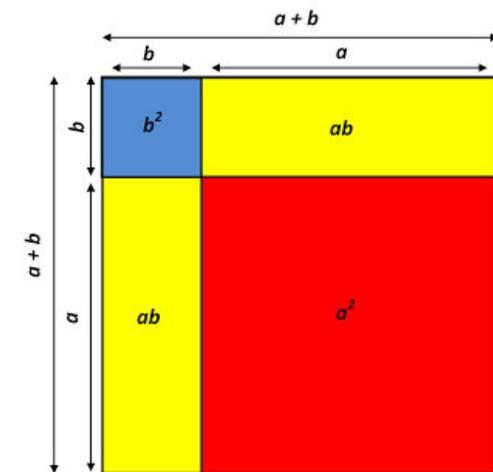


Imagen nº 2: Cuadrado de la suma. Autor: Almudena Casares
Fuente: [Matemáticas Almudena](http://matematicas-almudena.blogspot.com.es/) <http://matematicas-almudena.blogspot.com.es/>
Licencia: Desconocida

2.2. Cuadrado de la diferencia

El **cuadrado de la diferencia** de dos monomios a y b , es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

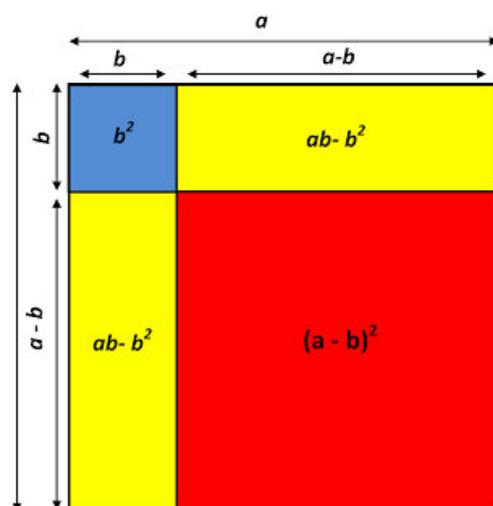


Imagen nº 3. Autor: Almudena Casares
Fuente: [Matemáticas Almudena](http://xn--matematicas-almudena-uub.blogspot.com.es/) <http://xn--matematicas-almudena-uub.blogspot.com.es/>
Licencia: Desconocida

2.3. Suma por diferencia

La **suma de un monomio por su diferencia** es igual al cuadrado del primer monomio menos el cuadrado del segundo.

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

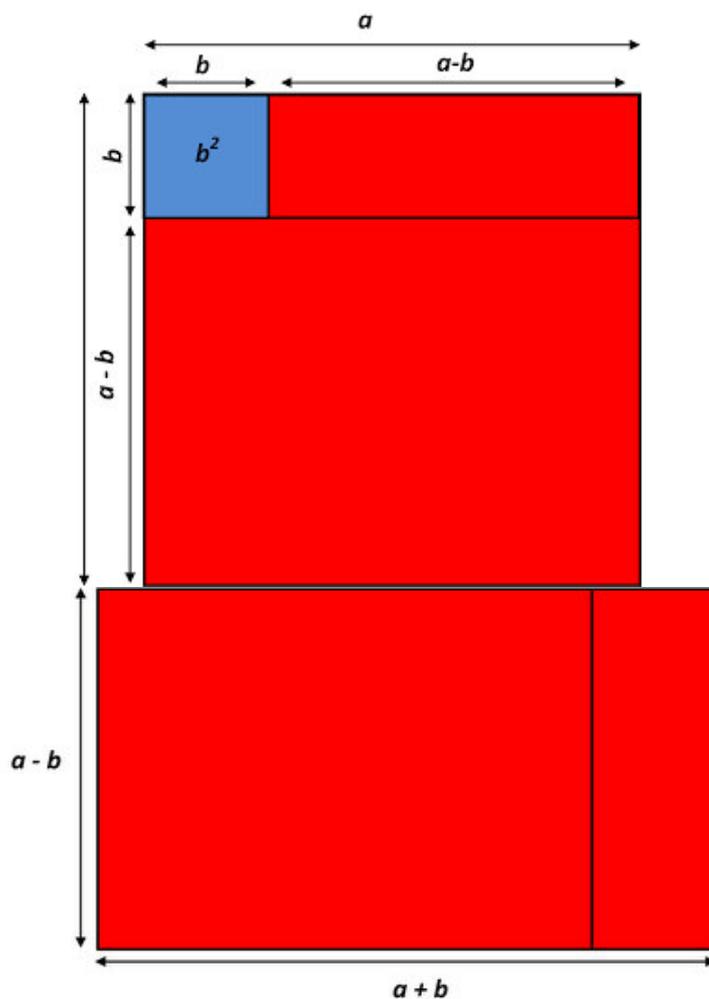


Imagen 4 y 5. Autor: Almudena Casares

Fuente: [Matemáticas Almudena](http://matematicas-almudena.blogspot.com.es/) <http://matematicas-almudena.blogspot.com.es/>

Licencia: desconocida

Actividad 5

Desarrolla las siguientes identidades notables y compruébalas:

- $(x + 1)^2$
- $(-2 + y)^2$
- $(1 - p) \cdot (1 + p)$

3. Representación gráfica

Una tabla es una representación de datos, mediante parejas de valores ordenados, que expresan la relación existente entre dos magnitudes o dos situaciones cualesquiera.

Por ejemplo, la siguiente tabla nos muestra el nivel de agua en un recipiente bajo un grifo que gotea con el paso del tiempo:

| | | | | | |
|---------------------------|---|----|----|----|----|
| Tiempo (minutos) | 0 | 15 | 30 | 45 | 60 |
| Nivel de agua (cm) | 0 | 10 | 14 | 17 | 19 |

La siguiente tabla nos indica el dinero a pagar por los alumnos que desean ir a una excursión dependiendo del número de alumnos que se apuntan al viaje:

| | | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|----|
| Nº alumnos | 5 | 10 | 20 | 40 | 50 |
| Euros | 80 | 40 | 20 | 10 | 8 |

Si nos fijamos bien, las tablas pueden ser aleatorias o mantener una relación de proporcionalidad, pero ¿cómo reconocer una proporcionalidad directa con tablas?

La siguiente tabla es de proporcionalidad directa

| | | | | | | |
|-----------------|-----|---|-----|-----|----|----|
| Serie 1ª | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 | 16 |
| Serie 2ª | 0'5 | 1 | 1'5 | 2'5 | 3 | 4 |

El diagrama muestra flechas que indican relaciones de multiplicación: una flecha roja curva arriba desde el 2 de la Serie 1ª al 10 de la Serie 1ª y al 2'5 de la Serie 2ª, etiquetada como 'x5'; una flecha azul curva arriba desde el 4 de la Serie 1ª al 12 de la Serie 1ª y al 3 de la Serie 2ª, etiquetada como 'x3'; una flecha roja curva abajo desde el 10 de la Serie 1ª al 2 de la Serie 1ª y al 0'5 de la Serie 2ª, etiquetada como 'x5'; y una flecha azul curva abajo desde el 12 de la Serie 1ª al 4 de la Serie 1ª y al 3 de la Serie 2ª, etiquetada como 'x3'.

Imagen nº 6. Proporcionalidad directa. Fuente: Elaboración propia

Observa que al multiplicar un valor de la 1ª serie por un número, el valor de la 2ª serie queda multiplicado por dicho número (o al revés).

3.1. Ejes de coordenadas cartesianas

Podemos representar las tablas de valores como pares de números, utilizando para ello los ejes de coordenadas cartesianas.

Los ejes coordenadas cartesianas están formados por dos rectas reales que se cortan en un punto. El eje horizontal se llama **eje de abscisas** o también **eje x**, y el vertical se llama **eje de ordenadas** o **eje y**. El punto donde se cortan los ejes es el **origen de coordenadas**.

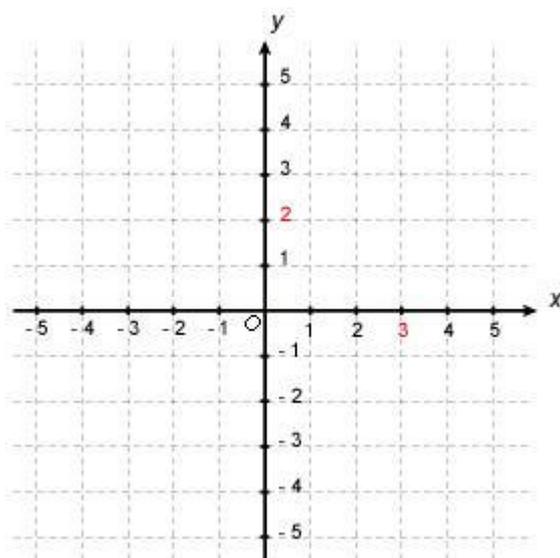


Figura 1

Imagen nº 7. Autor: Desconocido

Fuente: [Tareafacil](http://tareafacil.info/) <http://tareafacil.info/>

Licencia: desconocida

En el **eje de abscisas** o eje x:

- Los puntos situados a la derecha del 0 son POSITIVOS.
- Los puntos situados a la izquierda del 0 son NEGATIVOS.

En el **eje de ordenadas** o eje y:

- Los puntos situados por encima del 0 son POSITIVOS.
- Los puntos situados por debajo del 0 son NEGATIVOS.

3.2. Representación en un sistema de ejes de coordenadas

Con este sistema de referencia, cada punto del plano puede “nombrarse” mediante dos números, que suelen escribirse entre paréntesis y separados por una coma y se llama **coordenada del punto A (x, y)**. El primero de esos números corresponde a la distancia del punto hasta el eje de ordenadas, medida a lo largo del eje de abscisas o eje x; el segundo corresponde a la distancia desde el punto al eje de abscisas medido a lo largo del eje de ordenadas o eje y.

El plano queda dividido por los ejes de coordenadas en cuatro cuadrantes, de forma que cualquier punto ubicado en dichos cuadrantes cumplen una propiedad de signos de la siguiente forma:

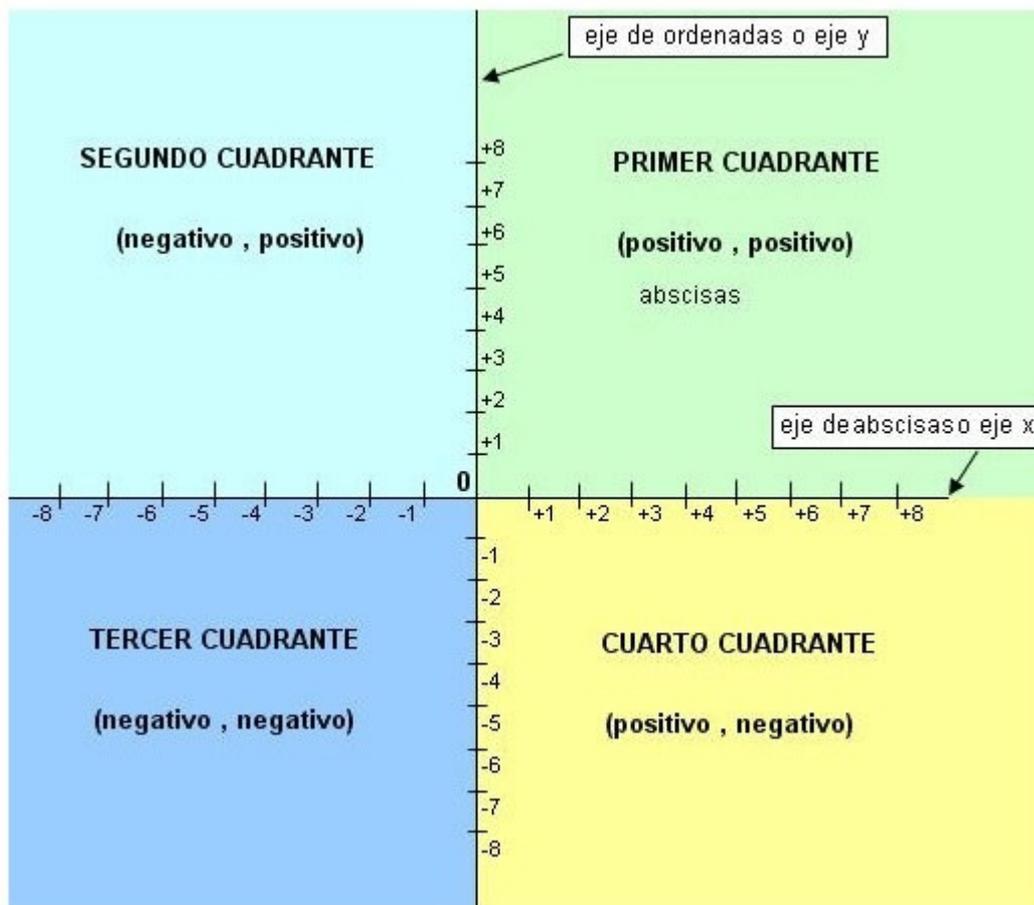


Imagen nº 8. Fuente: Elaboración propia

Para representar cualquier punto en unos ejes de coordenadas, mediremos las distancias del punto sobre los ejes x e y.

Ejemplo:

Vamos a representar en el eje de coordenadas los siguientes puntos:

A (+4, +3); B (0, +5); C (-2, +4); D (-3, -6); E (+3, -4); F (-7, 0)

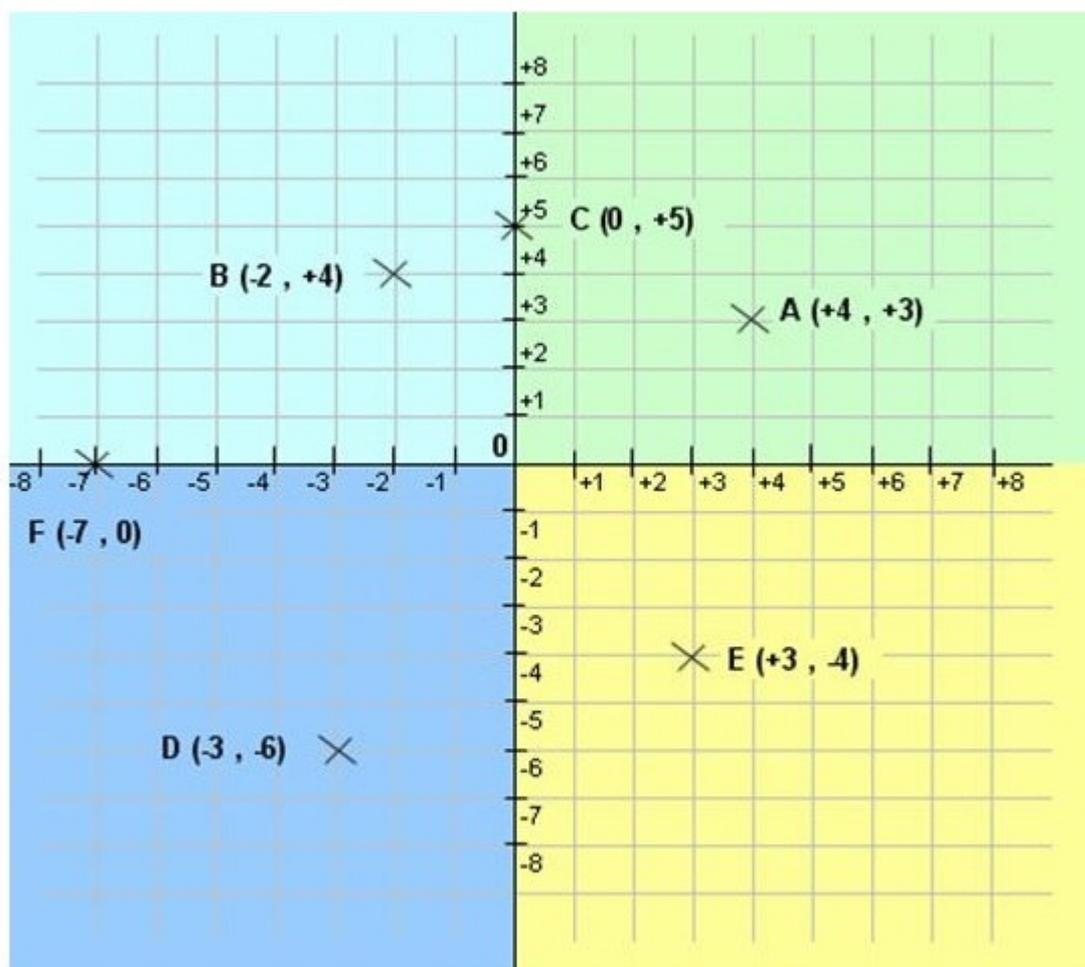


Imagen nº 9. Fuente: Elaboración propia

Actividad 6

Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:

A (-3,0); B (2,3); C (2,-4); D (-4,-1)

3.3. Representación gráfica de una tabla de valores

Una gráfica es la representación en unos ejes de coordenadas de los pares ordenados de una tabla. Para representar los datos de una tabla en una gráfica, seguimos los siguientes pasos:

1. **Representamos los puntos de la tabla sobre un eje.**
2. **Unimos los puntos de izquierda a derecha.**

Una vez realizada la gráfica podemos estudiarla, analizarla y extraer conclusiones.

Para interpretar una gráfica, hemos de observarla de izquierda a derecha:

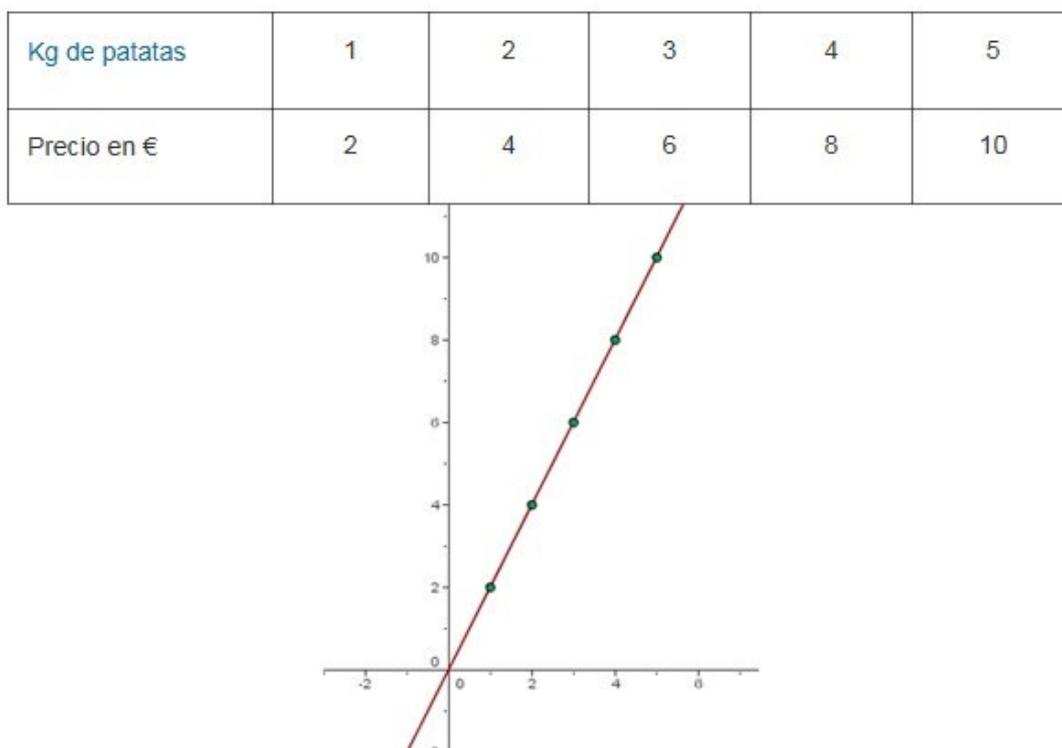


Imagen nº 10. Fuente: Elaboración propia

En esa gráfica podemos observar que a medida que compramos más kilos de patatas el precio se va incrementando.

Las gráficas pueden ser:

Creciente: Si al aumentar los valores del eje de abscisas (eje x), aumentan también los valores del eje de ordenadas (eje y).

Decreciente: Si al aumentar los valores del eje de abscisas, disminuyen los valores del eje de ordenadas.

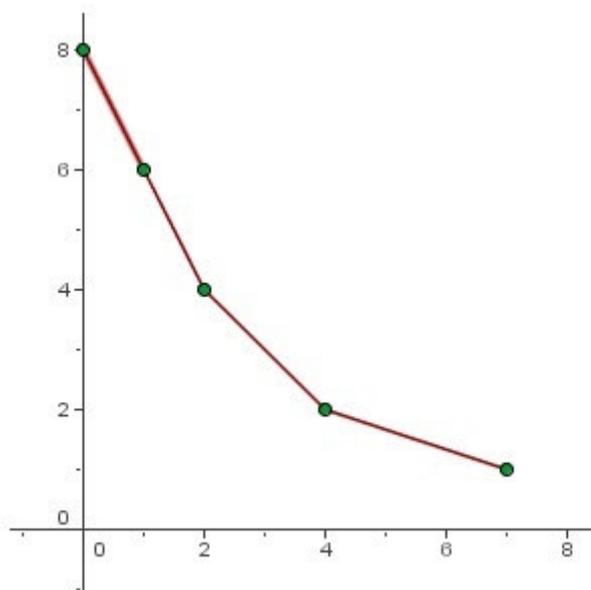


Imagen nº 11. Fuente: Elaboración propia

Constante: Si al aumentar el valor del eje de abscisas, el valor del eje de ordenadas se mantiene igual.

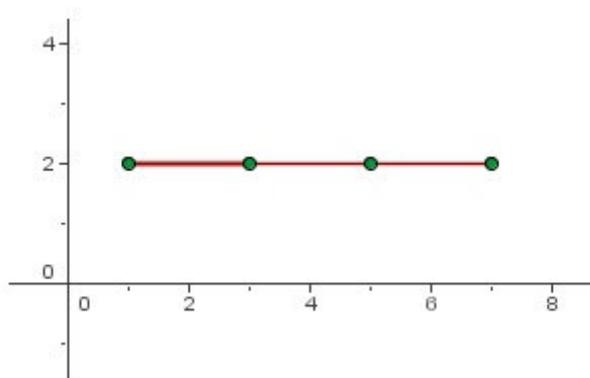


Imagen nº 12. Fuente: Elaboración propia

Para saber más

Cuando tenemos una gráfica, podemos obtener fácilmente relaciones entre los datos representados. Para ello trazamos líneas paralelas a los ejes de abscisas y de ordenadas desde cualquier punto del gráfico hasta que corten a dichos ejes. Así obtenemos los valores x e y del punto considerado.

Por ejemplo, en la siguiente gráfica representa la relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado.



Imagen nº 13. Fuente: Elaboración propia



Imagen nº 14. Fuente: Elaboración propia