

Bloque 4. Estadística y Probabilidad

2. Probabilidad

1. Definición de probabilidad

La probabilidad de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1, que indica las posibilidades que tiene de verificarse cuando se realiza un experimento aleatorio.

Dicho número puede multiplicarse por cien, y expresar la probabilidad así en tanto por ciento.

2. Tipos de experimentos

Experimentos deterministas: Son los experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen.

Ejemplo: Si dejamos caer una piedra desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la piedra bajará. Si la arrojamus hacia arriba, sabemos que subirá durante un determinado intervalo de tiempo; pero después bajará.

Experimentos aleatorios: Son aquellos en los que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del **azar**.

Ejemplos: Si lanzamos una moneda no sabemos de antemano si saldrá cara o cruz. Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener.

3. Teoría de probabilidades

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un **experimento aleatorio**, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro. Con este fin, introduciremos algunas definiciones:

Suceso: Es un posible resultado de una experiencia aleatoria.

Ejemplos: Que al lanzar una moneda salga cara, o que al lanzar una moneda se obtenga 4.

Espacio muestral: Es el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, lo representaremos por E (o bien por la letra griega Ω).

Ejemplos: El espacio muestral de una moneda será $E = \{C, X\}$. Espacio muestral de un dado será $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Suceso aleatorio: es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo: Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3, y otro, sacar 5.

Ejemplo: Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

1. El espacio muestral.

$$E = \{(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n,b); (n,n,n)\}$$

2. El suceso $A = \{\text{extraer tres bolas del mismo color}\}$.

$$A = \{(b,b,b); (n,n,n)\}$$

3. El suceso $B = \{\text{extraer al menos una bola blanca}\}$.

$$B = \{(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n,b)\}$$

4. El suceso $C = \{\text{extraer una sola bola negra}\}$.

$$C = \{(b,b,n); (b,n,b); (n,b,b)\}$$

Suceso elemental: es cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral.

Ejemplo: Por ejemplo al tirar un dado un suceso elemental es sacar 5.

Suceso compuesto: es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo: Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3.

Suceso seguro: Suceso seguro, E, está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

Ejemplo: Por ejemplo al tirar un dado un dado obtener una puntuación que sea menor que 7.

Suceso imposible: Suceso imposible, \emptyset , es el que no tiene ningún elemento.

Ejemplo: Por ejemplo al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7.

Sucesos compatibles: Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

Ejemplo: Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

Sucesos incompatibles: Dos sucesos, A y B, son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo: Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

Sucesos independientes: Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Ejemplo: Al lanzar dos dados los resultados son independientes.

Sucesos dependientes: Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Ejemplo: Extraer dos cartas de una baraja, sin reposición, son sucesos dependientes.

Suceso contrario: El suceso contrario a A es otro suceso que se realiza cuando no se realiza A. Se denota por \bar{A} .

Ejemplo: Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

Espacio de sucesos S: es el conjunto de todos los sucesos aleatorios.

Ejemplo: Si tiramos una moneda el espacio de sucesos está formado por:

$$S = \{ \emptyset, \{C\}, \{X\}, \{C,X\} \}.$$

Observamos que el primer elemento es el **suceso imposible** y el último el **suceso seguro**.

- Si E tiene un número finito de elementos, n, de elementos el **número de sucesos** de E es 2^n .

Una moneda $E = \{C, X\}$. Número de sucesos = $2^2 = 4$

Dos monedas $E = \{(C,C); (C,X); (X,C); (X,X)\}$. Número de sucesos = $2^4 = 16$

Un dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Número de sucesos = $2^6 = 64$

4. Operaciones con sucesos: Unión

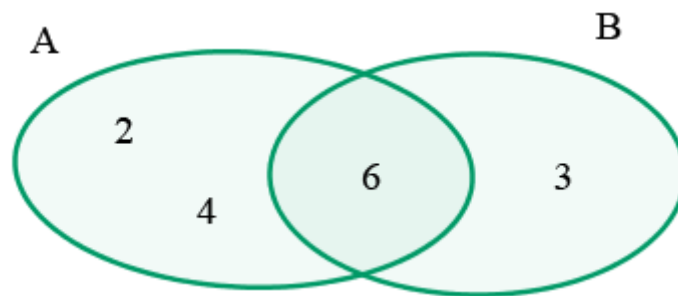
La **unión de sucesos**, $A \cup B$, es el suceso formado por todos los elementos de A y de B. Es decir, el suceso $A \cup B$ se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos. $A \cup B$ se lee como "**A o B**".

Ejemplo: Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular $A \cup B$.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$



Propiedades de la unión de sucesos

- **Conmutativa** $A \cup B = B \cup A$
- **Asociativa** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Idempotente** $A \cup A = A$
- **Simplificación** $A \cup (A \cap B) = A$
- **Distributiva** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Elemento neutro** $A \cup \emptyset = A$
- **Absorción** $A \cup E = E$

5. Operaciones con sucesos: Intersección

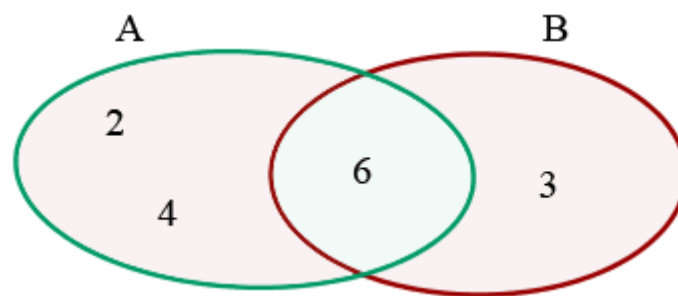
La **intersección de sucesos**, $A \cap B$, es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B. Es decir, el suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B. $A \cap B$ se lee como "**A y B**".

Ejemplo: Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si $A = \text{"sacar par"}$ y $B = \text{"sacar múltiplo de 3"}$. Calcular $A \cap B$.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$



Propiedades de la intersección de sucesos

- **Conmutativa** $A \cap B = B \cap A$
- **Asociativa** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Idempotente** $A \cap A = A$
- **Simplificación** $A \cap (A \cup B) = A$
- **Distributiva** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Elemento neutro** $A \cap E = A$
- **Absorción** $A \cap \emptyset = \emptyset$

6. Operaciones con sucesos: Diferencia

La **diferencia de sucesos**, $A - B$, es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B. Es decir, la **diferencia de los sucesos** A y B se verifica cuando lo hace A y no B. $A - B$ se lee como "**A menos B**".

Ejemplo: Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si $A = \text{"sacar par"}$ y $B = \text{"sacar múltiplo de 3"}$. Calcular $A - B$.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\}$$

$$A - B = \{2, 4\}$$



Propiedad de la diferencia

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

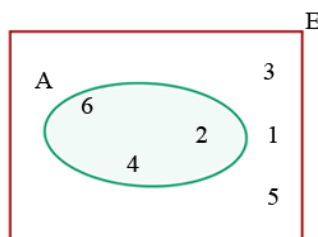
7. Operaciones con sucesos: suceso contrario

El suceso $\overline{A} = E - A$ se llama **suceso contrario** o complementario de A. Es decir, se verifica siempre y cuando no se verifique A.

Ejemplo: Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si $A = \text{"sacar par"}$. Calcular \overline{A} .

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$$



Propiedades del suceso contrario

$$\overline{(\overline{A})} = A$$

$$\overline{\overline{E}} = E$$

$$\overline{\emptyset} = E$$

$$A \cup \overline{A} = E$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Leyes de Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

8. Probabilidad Simple

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A se define mediante la **Regla de Laplace**, que es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplos

- Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras.

Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}.

Casos favorables: 1.

$$P(2 \text{ caras}) = \frac{1}{4}$$

- En una baraja de 40 cartas, hallar la P (as) y P (copas).

Casos posibles: 40.

Casos favorables de ases: 4.

$$P(\text{as}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Casos favorables de copas: 10.

$$P(\text{copas}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

- Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

Un número par.

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Casos favorables: {2, 4, 6}.

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Mayor que 4.

Casos favorables: {5, 6}.

$$P(> 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Otra definición de probabilidad es la definición **experimental**: cuando no estamos seguros de que los resultados posibles de un experimento aleatorio sean equiprobables, recurrimos a la frecuencia relativa del suceso para definir su probabilidad. La frecuencia relativa de un suceso A es el cociente entre el número de veces que ocurre el suceso n_A , y el número de veces que se realiza el experimento n:

$$fr(A) = \frac{n_A}{n}$$

A medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento, la frecuencia relativa de un suceso determinado tiende a estabilizarse alrededor de un número, que definimos como probabilidad de dicho suceso.

Por ejemplo, para encontrar la probabilidad experimental de ganar un juego, se debe jugar el juego muchas veces, y luego dividir el número de partidos ganados por el total de partidos jugados (cf *Discusión sobre Probabilidad y resultados*).

9. Propiedades y axiomas de la probabilidad

- 1) La probabilidad es positiva y menor o igual que 1.

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

- 2) La probabilidad del suceso seguro es 1 y la probabilidad del suceso imposible es 0.

$$p(E) = 1 \quad p(\emptyset) = 0$$

- 3) La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

- 4) Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \emptyset$ entonces:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

- 5) La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- 6) Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.

$$\text{Si } A \subset B, \text{ entonces } p(A) \leq p(B)$$

Ejemplos

- Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ (la intersección es nula)}$$

- Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (la intersección es que salga 6)}$$

10. Probabilidad condicionada

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral E, se llama **probabilidad** del suceso B **condicionado** a A y se representa por $P(B/A)$ a la **probabilidad del suceso B una vez ha ocurrido el A**.

$$P(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Ejemplo

- Calcular la probabilidad de obtener un 6 al tirar un dado sabiendo que ha salido par.

$$P(6/\text{par}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

11. Sucesos dependientes e independientes

Sucesos independientes: Dos sucesos A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$

Sucesos dependientes: Dos sucesos A y B son dependientes si $p(A/B) \neq p(A)$

Probabilidad de la intersección de sucesos independientes

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Ejemplo: Se tiene una baraja de 40 cartas, se saca una y se vuelve a meter. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A \cap B) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

Probabilidad de la intersección de sucesos dependientes

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

Ejemplo: Se tiene una baraja de 40 cartas, se extraen dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

12. Tablas de contingencia

Un método útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento es mediante las **tablas de contingencia**. Se trata de tablas en cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades conociendo otras de la tabla.

Ejemplo: Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

	Hombres	Mujeres	
Casados	35	45	80
Solteros	20	20	40
	55	65	120

$$p(\text{hombre soltero}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$p(\text{mujer / casado}) = \frac{45}{80} = 0.5625$$

13. Diagramas de árboles

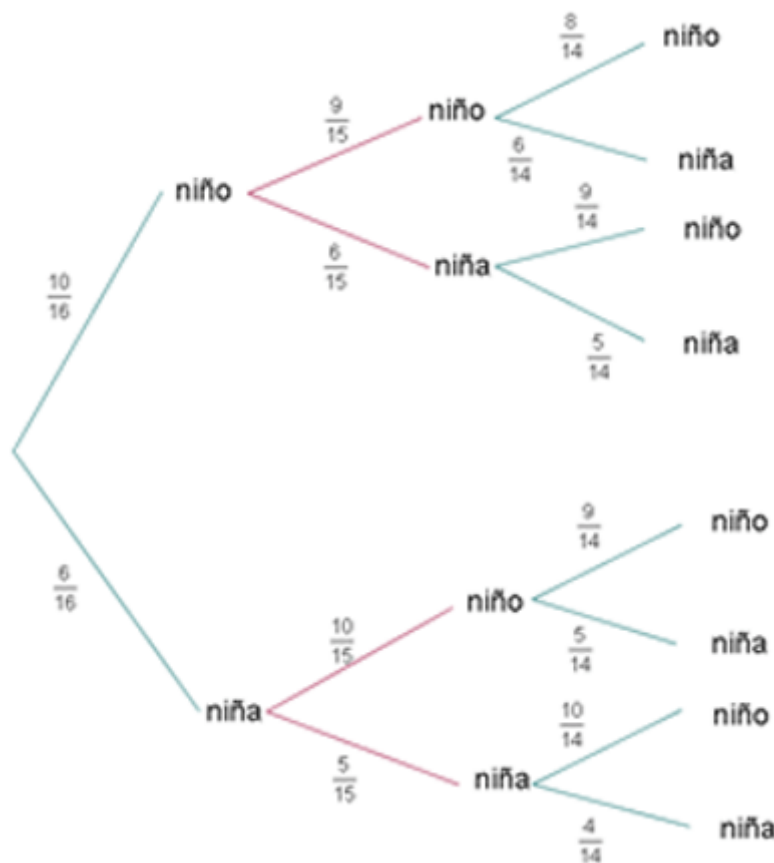
En ocasiones, para resolver problemas de probabilidad, nos podemos servir de diagramas de árboles. Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Hay que tener en cuenta: que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar **1**.

Para calcular la probabilidad de una hoja del árbol, se multiplican las probabilidades de todas las ramas desde la raíz del árbol hasta esa hoja. Si un suceso comprende varias hojas del árbol, entonces la probabilidad de ese suceso es la suma de las probabilidades de cada una de esas hojas.

Ejemplos: Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:



Seleccionar tres niños:

$$p(3 \text{ niños}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = 0.214$$

Seleccionar exactamente dos niños y una niña:

$$p(2 \text{ niños y } 1 \text{ niña}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = 0.482$$

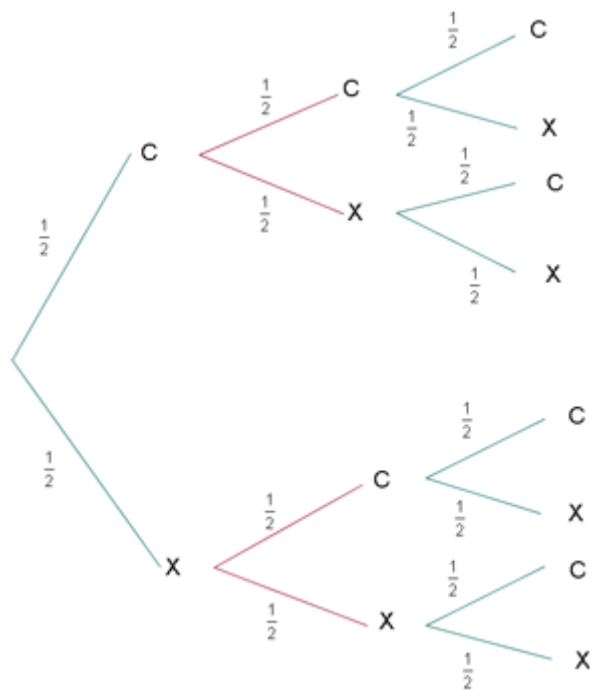
Seleccionar exactamente dos niñas y un niño:

$$p(2 \text{ niñas y } 1 \text{ niño}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = 0.268$$

Seleccionar tres niñas:

$$p(3 \text{ niñas}) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = 0.0357$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que al arrojar al aire tres monedas, salgan tres caras.



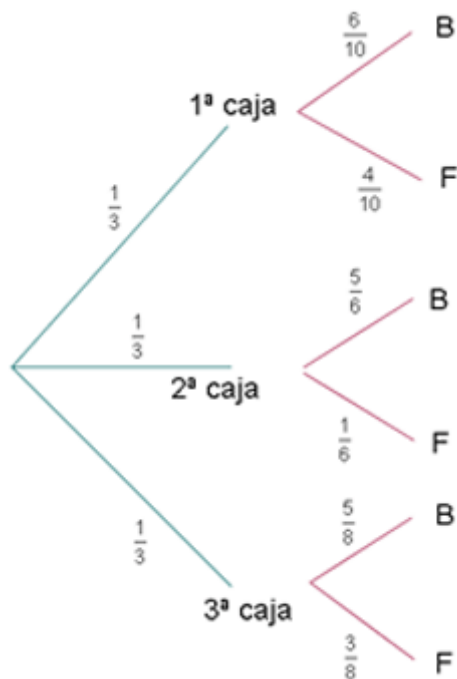
$$p(3C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

14. Experimentos compuestos

Un **experimento compuesto** es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples. Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un **experimento compuesto**.

En los **experimentos compuestos** es conveniente usar el llamado **diagrama en árbol** para hacerse una idea global de todos ellos.

Ejemplo: Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?



$$p(\text{fundida}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

15. Probabilidades a priori, a posteriori y verosimilitudes

Si A_1, A_2, \dots, A_n son:

Sucesos incompatibles 2 a 2.

Y cuya **unión** es el **espacio muestral** ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$).

Y B es otro suceso.

Resulta que:

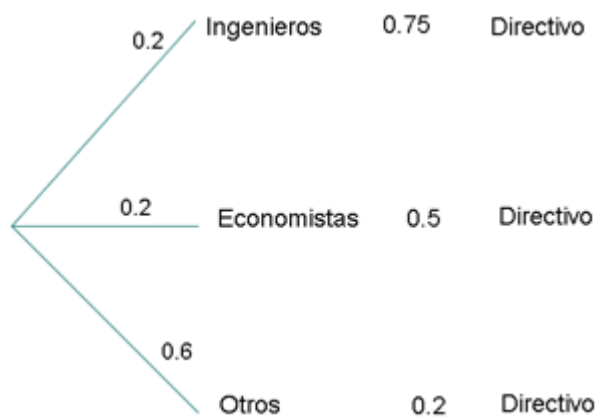
$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

Las probabilidades $p(A_i)$ se denominan **probabilidades a priori**.

Las probabilidades $p(A_i/B)$ se denominan **probabilidades a posteriori**.

Las probabilidades $p(B/A_i)$ se denominan verosimilitudes.

Ejemplo: El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?



$$p(\text{ingeniero} / \text{directivo}) = \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.2 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.2} = 0.405$$

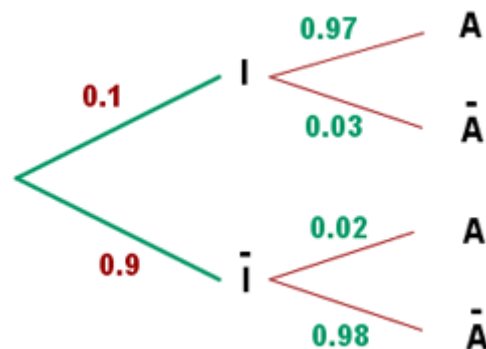
Ejemplo: La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta sí se ha producido algún incidente es de 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02.

En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Sean los sucesos:

I = Producirse incidente.

A = Sonar la alarma.



$$P(\bar{I} / A) = \frac{0.9 \cdot 0.02}{0.1 \cdot 0.97 + 0.9 \cdot 0.02} = 0.157$$

16. Teorema de la probabilidad total

Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles 2 a 2, cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$) y B es otro suceso, resulta que::

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

17. Teorema de Bayes

Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles 2 a 2, cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$) y B es otro suceso, resulta que::

$$p(A_i / B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

Ejercicios

1. Se extrae una carta al azar de un mazo inglés normal de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que no salga rey?

2. Tenemos el espacio muestral $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ y tenemos los siguientes conjuntos de valores $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,6\}$, $C=\{1,5\}$ $D=\{2,5,6\}$. Resuelve:

a) $A \cup C' =$

b) $D-A =$

c) $B \cap C =$

d) $B' - A' =$

3. En el lanzamiento de un dado de seis caras, calcular la probabilidad de que salga número par o primo.

4. Un monedero contiene 2 monedas de plata y 3 de cobre, y otro contiene 4 de plata y 3 de cobre. Si se elige un monedero al azar y se extrae una moneda. ¿cuál es la probabilidad de que sea de plata?

5. Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describir el espacio muestral cuando:

a. La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.

b. La primera bola no se devuelve

6. Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Escribir el espacio muestral y hallar la probabilidad de:

a. Extraer las dos bolas con reemplazamiento.

b. Sin reemplazamiento.

7. Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

8. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:

a. La probabilidad de que salga el 7.

b. La probabilidad de que el número obtenido sea par.

c. La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.

9. Se lanzan tres dados. Encontrar la probabilidad de que:

a. Salga 6 en todos.

b. Los puntos obtenidos sumen 7.

10. Busca la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

a. Un número par.

b. Un múltiplo de tres.

c. Mayor que cuatro.

11. En un sobre hay 20 papeletas, ocho llevan dibujado un coche las restantes son blancas. Hallar la probabilidad de extraer al menos una papeleta con el dibujo de un coche:

- Si se saca una papeleta.
- Si se extraen dos papeletas.
- Si se extraen tres papeletas

12. Tenemos un aula que contiene 10 españoles, 7 franceses y 3 ingleses. Si sacamos 2 personas SIN reposición (reemplazamiento). Calcula la probabilidad de que las 2 sean ingleses.

13. Se hace girar la flecha y se observa sobre qué número se detiene. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:



- Obtener un número par.
- Obtener un número primo.
- Obtener 5 o más.
- Que no salga el 7.

14. Extraemos una ficha de un dominó. Calcula la probabilidad de que:

- La suma de puntos sea igual a 6.
- La suma de puntos sea menor que 4.
- Sea una ficha “doble”.

15. Lanzamos dos monedas y anotamos el número de caras que obtenemos. El espacio muestral es $E = \{0, 1, 2\}$.

- ¿Tienen los tres sucesos elementales la misma probabilidad?
- Calcula la probabilidad de “0 CARAS”, “1 CARA”, “2 CARAS”. Comprueba que su suma es igual a 1.
- ¿Cuál es el suceso contrario de “0 CARAS”?
- ¿Cuál es la probabilidad del suceso “ALGUNA CARA”?

16. Lanzamos dos dados y anotamos la diferencia entre la mayor y la menor puntuación.

Completa la tabla y calcula la probabilidad de que la diferencia sea:

- 0
- 5
- 2 como máximo.

17. Lanzamos dos dados. Llamamos A , B y C a los siguientes sucesos:

- A : La suma de puntos es 5.
 B : En uno de los dados ha salido 4.
 C : En los dos dados salió el mismo resultado.

- Escribe los sucesos elementales de A , B , C , $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cap C$.
- Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos del apartado a).

18. En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 100 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola blanca en 41 ocasiones, bola negra en 19, bola verde en 18 y bola azul en 22. Al hacer una nueva extracción, di qué probabilidad asignarías a:

- Sacar bola blanca.
- No sacar bola blanca.
- Sacar bola verde o azul.
- No sacar ni bola negra ni azul.

19. Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarilla y siete verdes. Si se extrae una bola al azar calcular la probabilidad de que:

- a) Sea roja
- b) Sea verde
- c) Sea amarilla
- d) No sea roja.
- e) No sea amarilla.

20. Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Escribir el espacio muestral y hallar la probabilidad de los sucesos:

- a) Con reemplazamiento.
- b) Sin reemplazamiento.

21. Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

22. En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, cinco alumnos rubios y 10 morenos. Un día asisten 45 alumnos, encontrar la probabilidad de que un alumno:

- a) Sea hombre.
- b) Sea mujer morena.
- c) Sea hombre o mujer.

23. Un dado está trucado, de forma que las probabilidades de obtener las distintas caras son proporcionales a los números de estas. Hallar:

- a) La probabilidad de obtener el 6 en un lanzamiento.
- b) La probabilidad de conseguir un número impar en un lanzamiento.

24. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:

- a) La probabilidad de que salga el 7.
- b) La probabilidad de que el número obtenido sea par.
- c) La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.

25. Se lanzan tres dados. Encontrar la probabilidad de que:

- a) Salga 6 en todos.
- b) Los puntos obtenidos sumen 7.

26. Hallar la probabilidad de que al levantar unas fichas de dominó se obtenga un número de puntos mayor que 9 o que sea múltiplo de 4.

27. Hallar la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan:

- a) Dos caras.
- b) Dos cruces.
- c) Una cara y una cruz.

28. Los estudiantes A y B tienen respectivamente probabilidades $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$ de suspender un examen. La probabilidad de que suspendan el examen simultáneamente es de $\frac{1}{10}$. Determinar la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes suspenda el examen.

29. Dos hermanos salen de caza. El primero mata un promedio de 2 piezas cada 5 disparos y el segundo una pieza cada 2 disparos. Si los dos disparan al mismo tiempo a una misma pieza, ¿cuál es la probabilidad de que la maten?

Ejercicios de las pruebas de acceso

30. Una caja contiene 15 tornillos, de los cuales 4 son defectuosos. Se extraen de forma sucesiva y sin devolverlos a la caja, 3 tornillos. Calcula la probabilidad de que:

- A) Todos los tornillos sean correctos
- b) Al menos un tornillo de los extraídos sea defectuoso

31. En una facultad universitaria, los alumnos se clasifican según su sexo y su gusto por la práctica de algún deporte, resultando:

	Practica deporte	No practica deporte	Total
Varón	189	301	490
Mujer	165	335	500
Total	354	636	990

A la vista de estos datos, calcula la probabilidad de que elegido un alumno al azar:

- a) Practique deporte
- b) Sea mujer y no practique deporte
- c) Practique deporte sabiendo que es mujer
- d) Sea varón si el alumno elegido no practica deporte

32. Un dado se ha trucado para que la probabilidad de que salga cada una de sus caras sea proporcional al número que aparece en ellas.

- a) Calcula la probabilidad de obtener un 4 al lanzar el dado
- b) Dados los sucesos $A = \{\text{salir un 2 o un 3}\}$ y $B = \{\text{salir un 5}\}$, ¿Cuál de ellos es más probable?

33. Un jugador profesional lanza un dado trucado. La probabilidad de cada una de las seis caras es:

1	2	3	4	5	6
0.1	0.1	0.1	a	b	0.4

Sabiendo que $P(4) = 2P(5)$, se pide:

- a) Calcula el valor de a y b
- b) ¿qué cara debe pedir el jugador para ganar las partidas?

34. Se tienen dos urnas U1 y U2 cuyo contenido en bolas rojas, azules y verdes es: en la urna U1 4 bolas azules, 3 bolas rojas y 3 verdes, en la urna U2 4 rojas, 5 azules y una verde. Se lanzan tres monedas y si se tienen exactamente dos caras seguidas se extrae una bola de la urna U1; en otro caso se extrae de la urna U2. Se pide:

- a) Espacio muestral para el experimento aleatorio de lanzar tres monedas
- b) Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea azul

35. Entre la población de una determinada región se estima que el 55% presenta obesidad, el 20% presenta hipertensión y el 15% tiene obesidad y es hipertenso.

- a) Calcula la probabilidad de ser hipertenso o tener obesidad
- b) Calcula la probabilidad de tener obesidad sabiendo que se es hipertenso
- c) Calcula la probabilidad de ser hipertenso sabiendo que es obeso