Bloque 3. Funciones

1. Análisis de funciones

1. Concepto de función

Una función es una relación entre dos magnitudes, de tal manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, llamada imagen. Si tenemos una gráfica en la que para algún valor de x hay varios de y, esa gráfica NO representa una función.

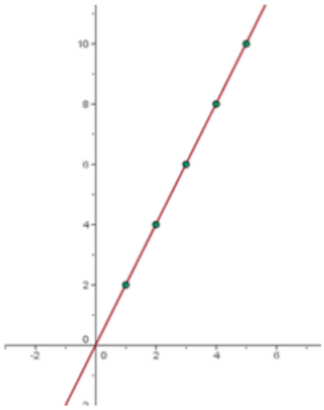
Ejemplo: El precio de un viaje viene dado por: y = 3 + 0.5x ; Siendo x el tiempo en minutos que dura el viaje.

Como podemos observar la función relaciona dos variables. x e y, x es la variable independiente, y es la variable dependiente (depende de los minutos que dure el viaje).

2. Representación gráfica de una función

Una gráfica es la representación en unos ejes de coordenadas de los pares ordenados de una tabla de datos asociada a una función. Las gráficas describen relaciones entre dos variables. La variable que se representa en el eje horizontal se llama variable independiente o variable **x**. La que se representa en el eje vertical se llama variable dependiente o **y**. La variable **y** está en función de la variable **x**.

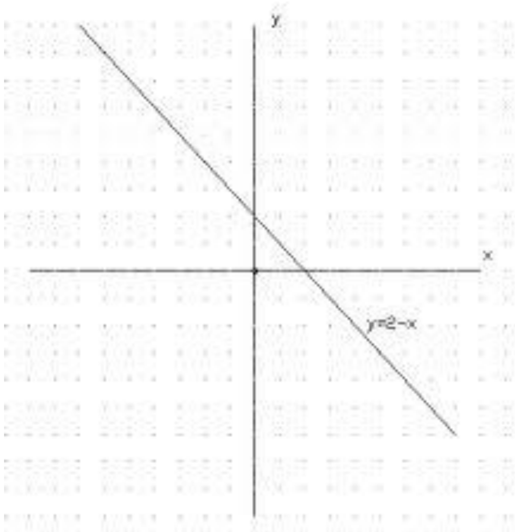
Kg de patatas	1	2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10



En esa gráfica podemos observar que a medida que compramos más kilos de patatas el precio se va incrementando.

Para representar una función a partir de una ecuación de la misma, podemos crear una tabla con algunos valores de x, calcular el valor asociado de y en cada caso, y representar esos puntos y dibujar la gráfica de forma aproximada.

Ejemplo – Representar la función y= 2-x

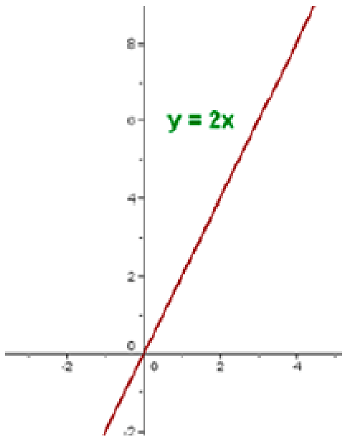


Valor de X	Valor de y	Punto
0	y = 2-0 = 2	(0,2)
1	y= 2-1 = 1	(1,1)
2	y = 2-2 = 0	(2,0)

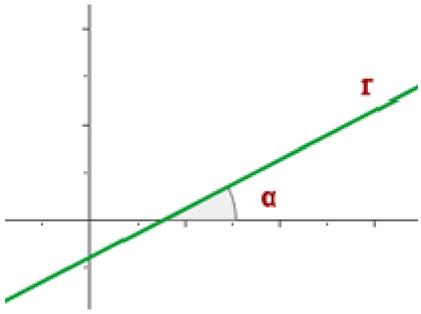
3. Funciones lineales

Es una función polinómica de primer grado y tiene una ecuación del tipo: **y = mx**. Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, y su pendiente es **m**.

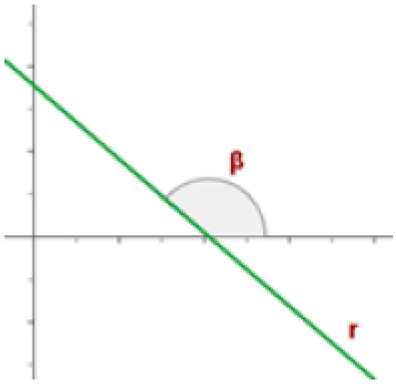
x	y = 2x
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8



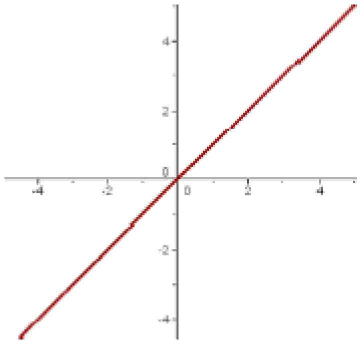
Si **m > 0** la función es creciente y ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **agudo**.



Si **m < 0** la función es decreciente y ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **obtuso**.

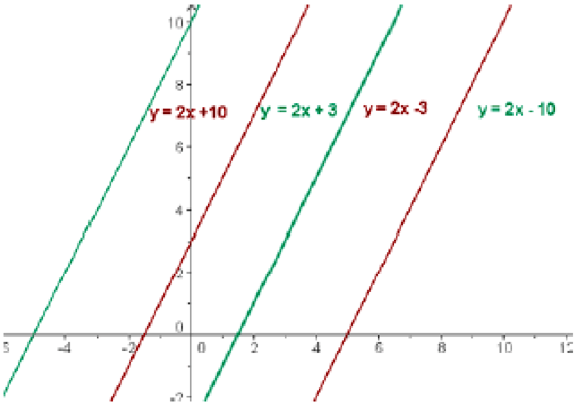


Un caso especial es la función identidad f(x) = x. Su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante, y la pendiente es 1.



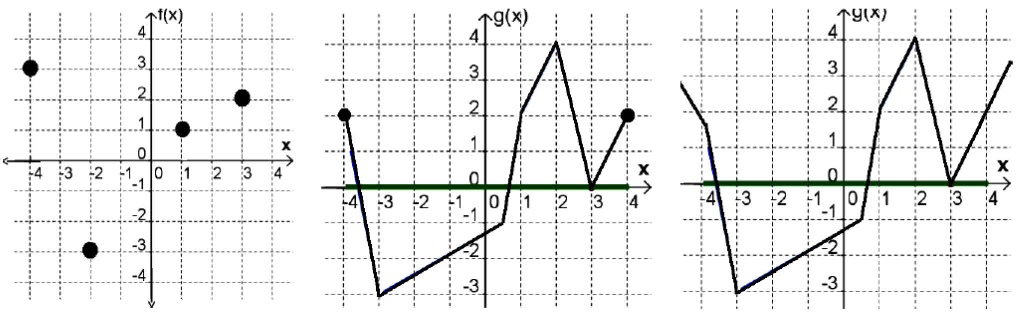
4. Función lineal afín

Es una función de primer grado y su ecuación es del tipo: **y = mx + n**, **m** es la pendiente y **n** la ordenada de origen (0,n) que nos indicará el punto de corte con el eje Y. Su gráfica es también una recta, pero no pasa por el origen de coordenadas.



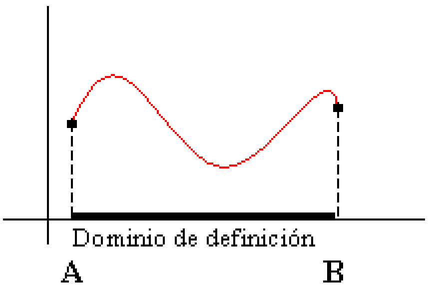
5. Dominio de una función

Conjunto de todos los valores que toma la función en el eje **x**. Leemos de izquierda a derecha en el eje x y vemos para qué valores hay función.



Dom = {-4, -2, 1, 3} **Dom = [-4, 4]** **Dom = R ó (-∞,∞)**

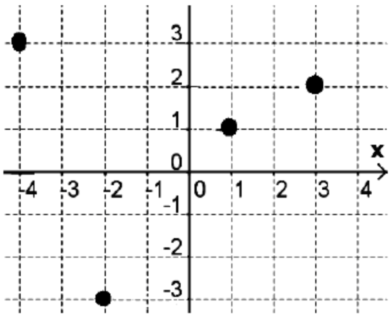
El dominio se puede representar como valores concretos de X (separados por comas, entre llaves), como intervalos (abiertos o cerrados), o si son todos los números se puede representar por R. Por así decirlo, es la proyección de los puntos de la función sobre el eje X.



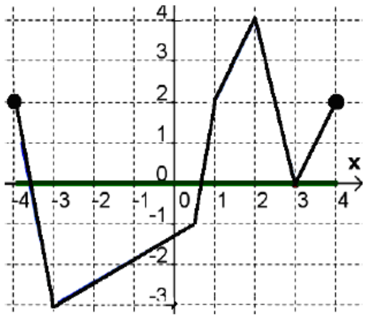
Importante: si un punto se representa como un círculo no sombreado, es porque en ese punto, en ese valor de X, NO HAY FUNCIÓN.

6. Rango o recorrido de una función

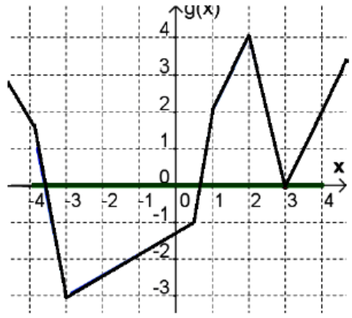
Análogamente al dominio, se define el recorrido como el conjunto de todos los valores que toma la función en el eje **y**. Leemos de abajo a arriba en el eje **y,** y vemos para que valores hay función.



Rec = {-3, 1, 2, 3}

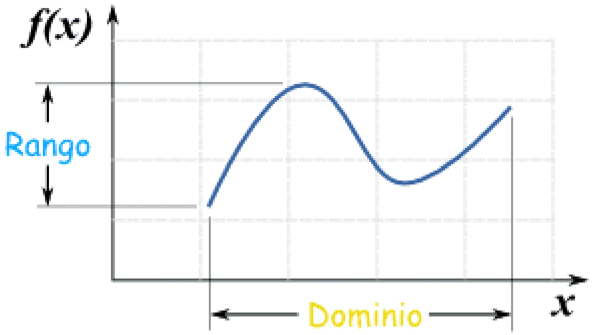


Rec = [-3, 4]



Rec = [-3, ∞]

En este punto se entiende el recorrido como la proyección de los puntos de la función sobre el eje Y.

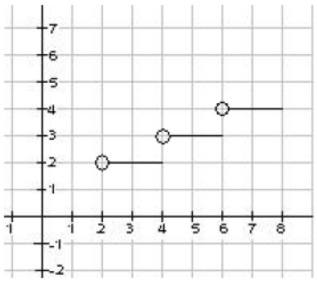


7. Continuidad y discontinuidad de una función

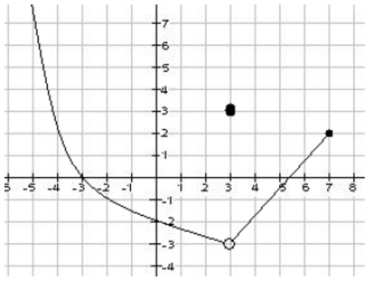
Se entiende como **continuidad** en una función aquellos tramos que, por así decirlo, se pueden repasar sin levantar el lápiz del papel. Asímismo, se entiende como **discontinuidad** cuando al dibujar la gráfica y pasar por un punto, es necesario levantar el lápiz del papel.

Para expresar por escrito que una función es continua o discontinua es suficiente con dar los valores de “x” donde esto ocurre.

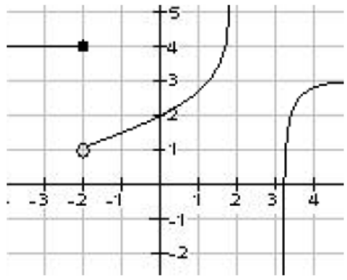
Nota: **El círculo en la gráfica representa ausencia de función.**



Continua: (2,4)U(4,6)U(6,8)
Discont: {4,6}



Continua: (- ∞ ,3) U (3,7]
Discont: {3}



Continua: (-∞ ,-2)U(-2,2)U(3, ∞)
Discont: {-2} U [2,3]

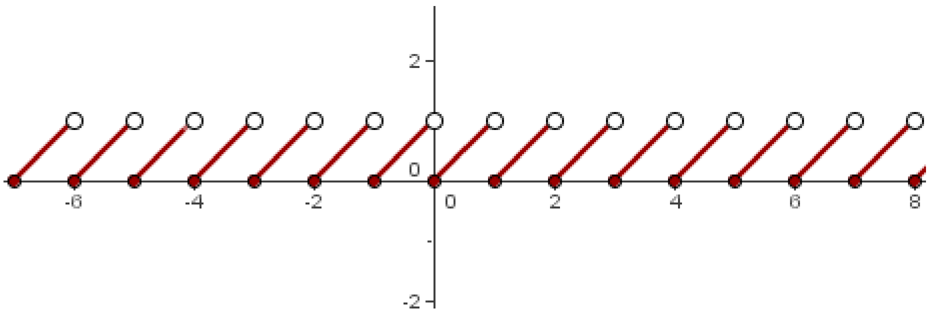
8. Crecimiento de una función

Dentro de una función, podemos encontrar tramos con las siguientes características:

Tramo creciente: una función es creciente en un tramo cuando al aumentar los valores de x aumentan los valores de y. *Esto quiere decir que cuando nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia arriba.* Matemáticamente, una función es creciente en un intervalo si para $x_1<x_2$, siendo x_1 y x_2 valores del intervalo, entonces $f(x_1)<f(x_2)$.

Tramo decreciente: una función es decreciente en un tramo cuando al aumentar los valores de x disminuyen los valores de y. *Esto quiere decir que cuando nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia abajo.* Matemáticamente, una función es creciente en un intervalo si para $x_1<x_2$, siendo x_1 y x_2 valores del intervalo, entonces $f(x_1)>f(x_2)$.

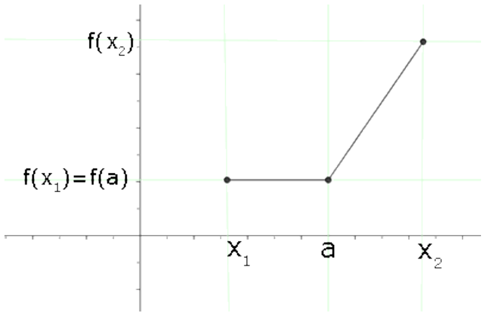
Tramo constante: una función es constante en un tramo cuando al aumentar los valores de x, el valor de y no cambia. Matemáticamente, una función es creciente en un intervalo si para cualesquiera x_1 y x_2 valores del intervalo, entonces $f(x_1)=f(x_2)$.



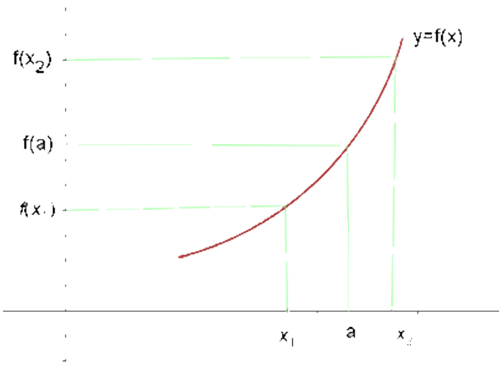
Según la definición, la función que vemos en el ejemplo tiene infinitos tramos crecientes, pero cuidado, no se pueden poner que es creciente en R, porque los puntos de discontinuidad implican que haya intervalos distintos de crecimiento. Por tanto, será creciente en …(-6,-5) U (-5,-4) U (-4,-3) U (-3,-2) U (-2,-1) U (-1,0) U (0,1) U (1,2) …

Según, esto, además, una función puede ser monótona, de cuatro tipos:

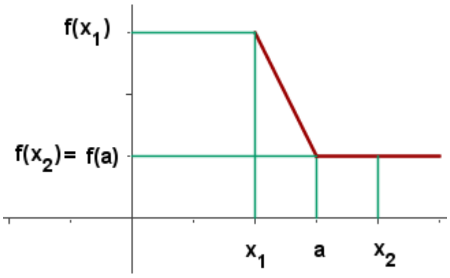
Creciente: es creciente o constante en todo el dominio.



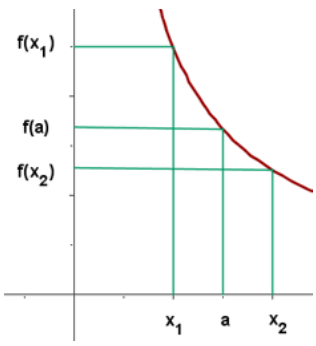
Estrictamente creciente: es creciente en todo el dominio.



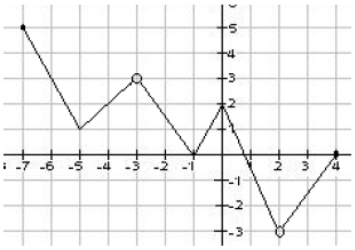
Decreciente: es decreciente o constante en todo el dominio.



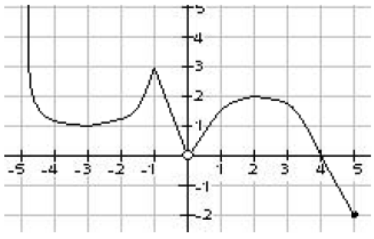
Estrictamente decreciente: es decreciente en todo el dominio.



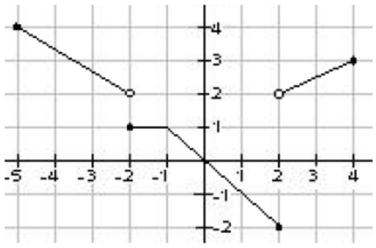
Las funciones que tienen tramos crecientes, decrecientes y/o constantes, son no monótonas, y se estudia su crecimiento en tramos, siempre en el eje X.



Creciente: (-5,-3)U(-1,0)U(2,4)
Decrec: (-7,-5)U(-3,-1)U(0,2)



Crec: (-3,-1) U (0,2)
Decrec: (-5,-3)U(-1,0)U(2,5)

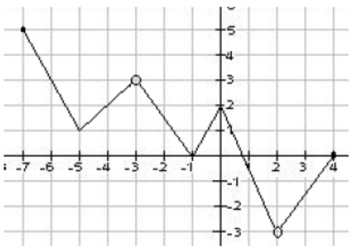


Crec: (2,4)
Decrec: (-5,-2) U (-1,2)
Constante: (-2,-1)

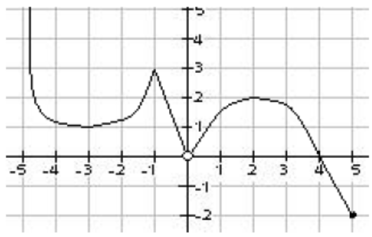
9. Máximos y mínimos absolutos

Máximo absoluto: Es un punto de la función donde la **y** es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función. No siempre existe.

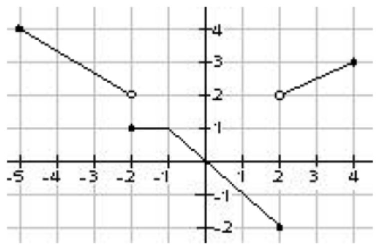
Mínimo absoluto: Es un punto de la función donde la **y** es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función. No siempre existe.



Max absoluto: (-7,5)
Min absoluto: No hay

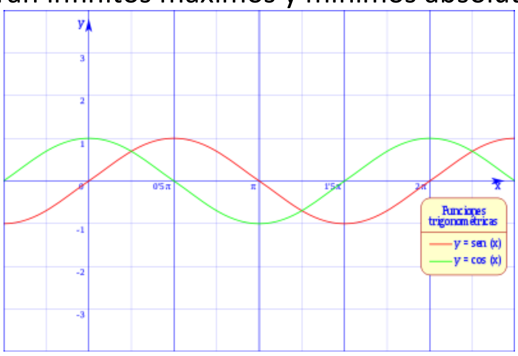


Max absoluto: No hay
Min absoluto: (5,-2)

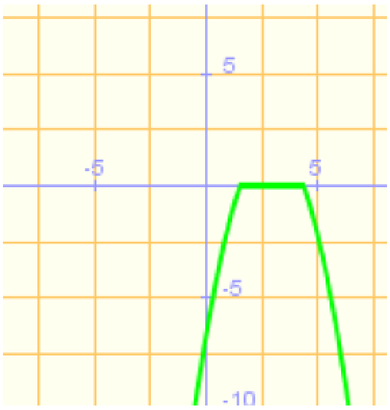


Max abs: (-5,4)
Min abs: (2,-2)

- Si en el punto más alto o más bajo de la función, encontramos un punto abierto (que no pertenece a la función), se considera que no existe el máximo o mínimo absoluto.
- Si dos o más puntos son los más altos o más bajos de la función, entonces se considera que hay varios máximos o mínimos relativos. Por ejemplo, la función seno o coseno tendrán infinitos máximos y mínimos absolutos.



- Si en una función hay un tramo constante en la parte más alta o más baja, podría tener infinitos máximos o mínimos absolutos (los que correspondan a ese tramo).



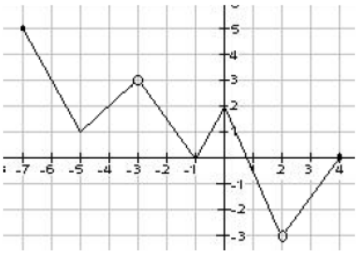
En este ejemplo, serían máximos absolutos todos los puntos en el intervalo [1'25, 4,75]

- Si el recorrido de la función llega hasta +∞, no habrá máximos, y si llega hasta -∞ no habrá mínimos.

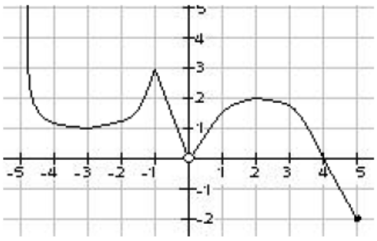
10. Máximos y mínimos relativos

Máximo relativo: Cuando en un punto existe una rama creciente por su izquierda y decreciente por su derecha.

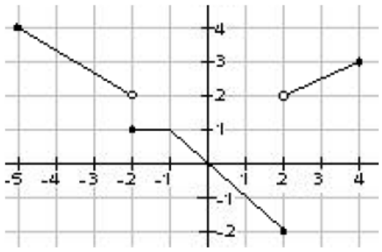
Mínimo relativo: Cuando en un punto de la función existe una rama decreciente por su izquierda y una rama creciente por su derecha.



Min relativo: (-5,1), (-1, 0)
Max relativo: (0,2)

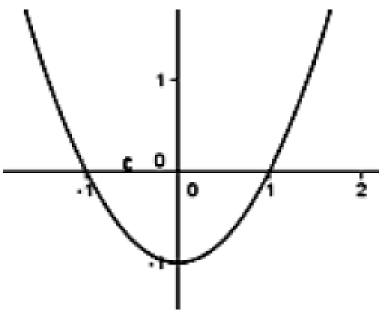


Min relativo: (-3,1)
Max relativo: (-1,3), (2,2)



Min relat: No hay
Max relat: No hay

Un punto puede ser a la vez máximo absoluto y máximo relativo, o mínimo absoluto y mínimo relativo.

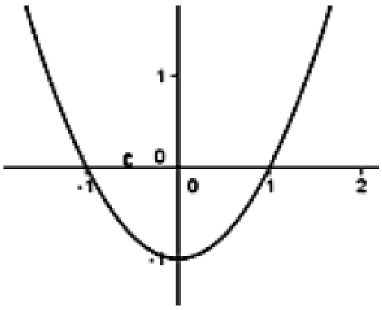


En este ejemplo, el punto (0,-1) sería mínimo absoluto (porque es el punto más bajo) y mínimo relativo (porque a la izquierda hay una rama decreciente y a la derecha una creciente).

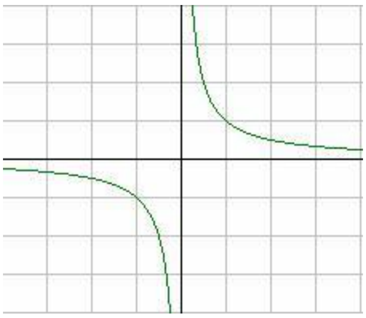
11. Puntos de corte con los ejes

Los puntos de corte con los ejes de una función son:

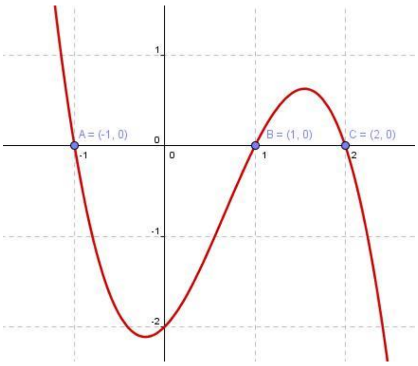
- ***Puntos de corte con el eje X***: aquellos cuyo valor de y es 0 (los que se representan sobre el eje X).
- ***Puntos de corte con el eje Y***: aquellos cuyo valor de x es 0 (los que se representan sobre el eje X).



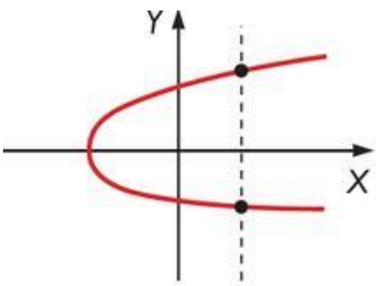
En este ejemplo, los puntos (-1,0) y (1,0) serían los cortes con el eje X, y el punto (0,-1) el corte con el eje Y.



- Una función puede no cortar a ninguno de los ejes.



- Una función puede cortar varias veces al eje X.

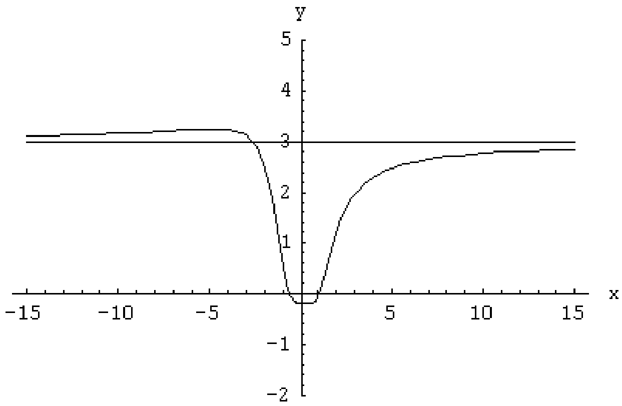


- Una función no puede cortar más de una vez al eje Y (pues en ese caso no sería función ya que tendría más de un valor de Y para el valor de X=0).

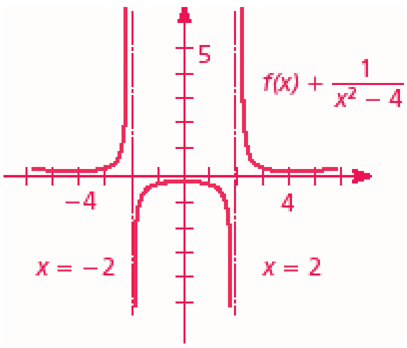
12. Asíntotas

Son rectas a las cuales la función se va acercando indefinidamente, sin llegar a tocarlas nunca. Hay de tres tipos:

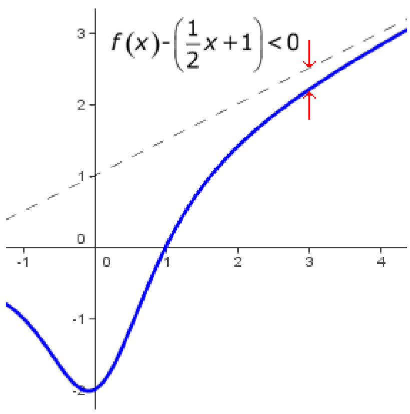
- ***Asíntotas horizontales***



- ***Asíntotas verticales***



- ***Asíntotas oblicuas***

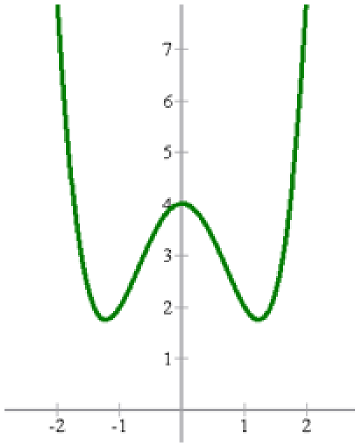


13. Simetría

Simetría respecto del eje de ordenadas: Una función f es simétrica respecto del eje de ordenadas si ésta es una **función par**, es decir, si cumple que **f(-x) = f(x)**

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

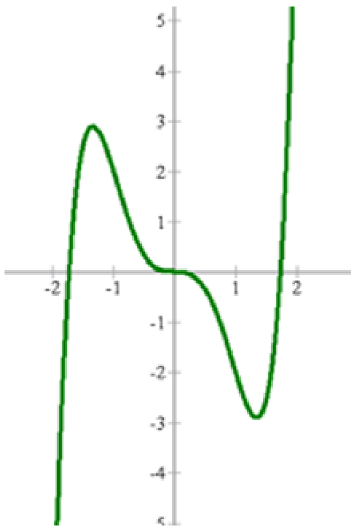
$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 = f(x)$$



Simetría respecto al origen: Una función f es simétrica respecto al origen si ésta es una **función impar**, es decir, si cumple que **f(-x) = -f(x)**

$$f(x) = x^5 - 3x^3$$

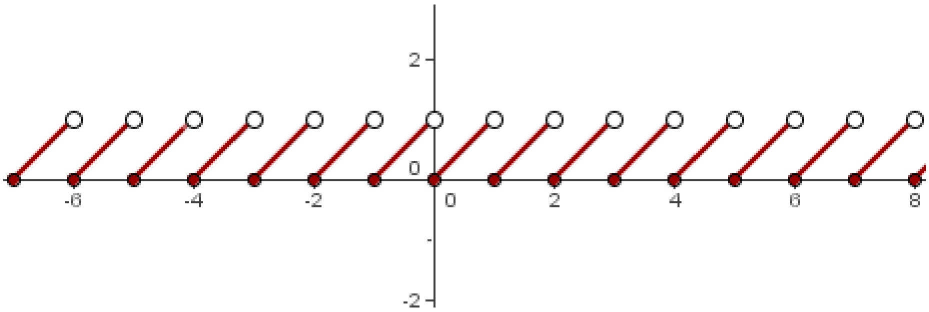
$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 = -x^5 + 3x^3 = -(x^5 - 3x^3) = -f(x)$$



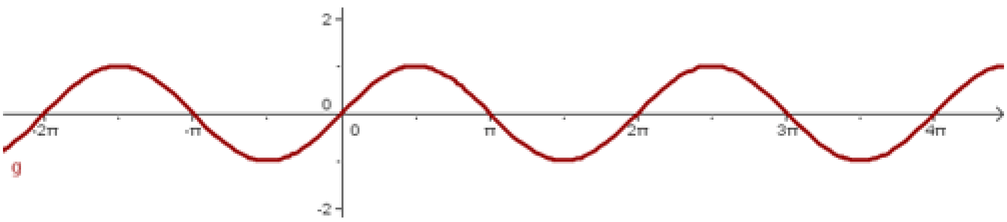
14. Periodicidad

Una **función** es **periódica** cuando en su gráfica vemos que el dibujo se va repitiendo, durante un intervalo de x que se llama período

Ejemplos- **La función f(x) = x – E(x), es periódica de periodo 1.**



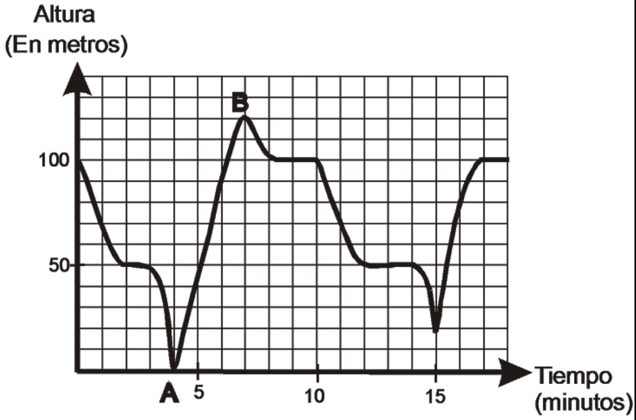
La función f(x) = sen x es periódica, con T = 2π



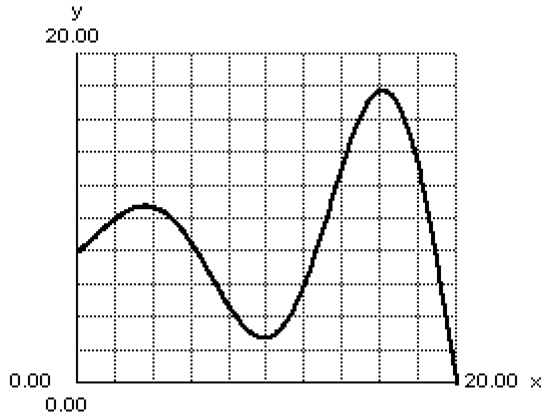
Ejercicios-

1. Estudia Las siguientes funciones (continuidad, dominio, recorrido, corte con los ejes, máximos, mínimos, simetría, crecimiento y monotonía, periodicidad).

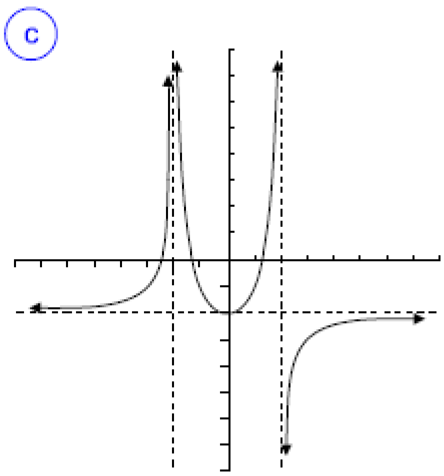
a)



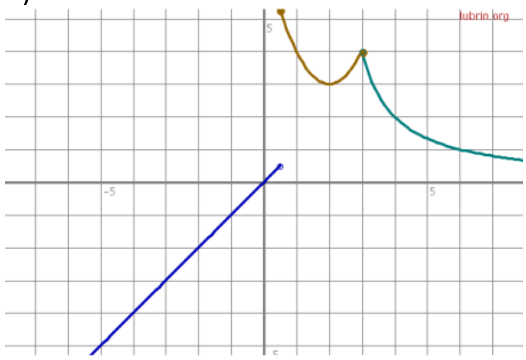
b)



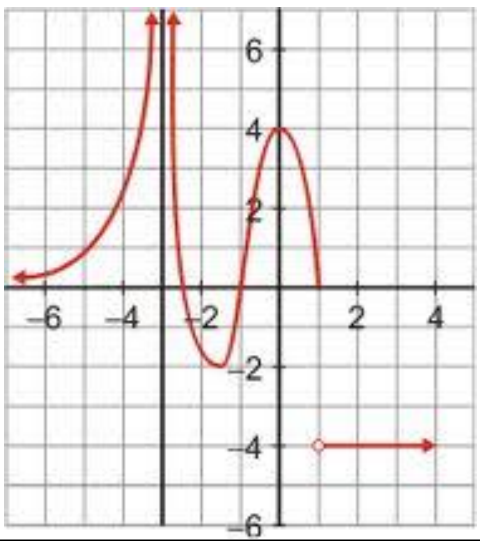
c)



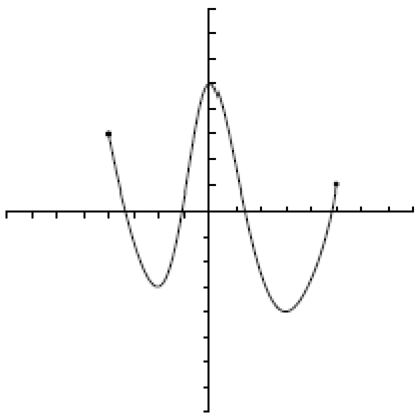
d)



e)

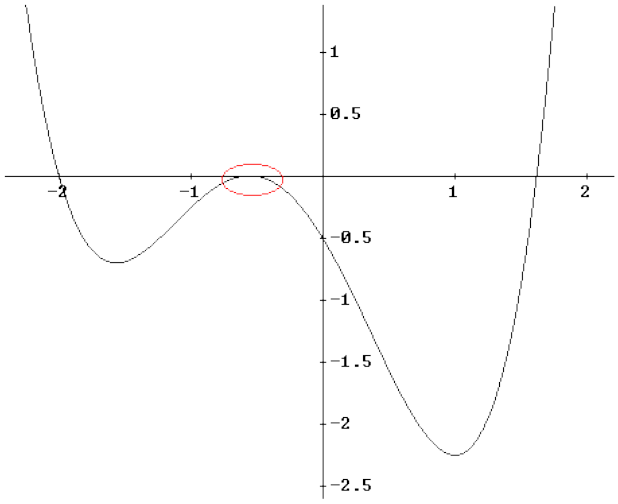


f)

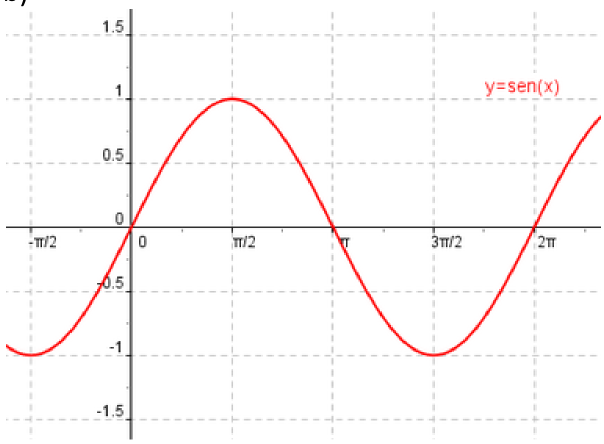


2. Estudia las siguientes funciones (dominio, recorrido, periodicidad, simetría, continuidad, crecimiento, máximos y mínimos, etc)

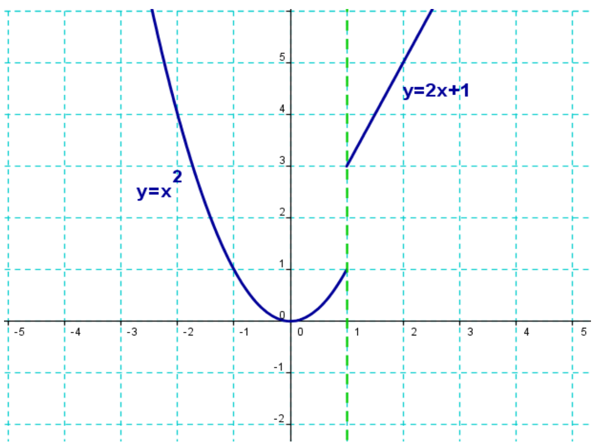
a)



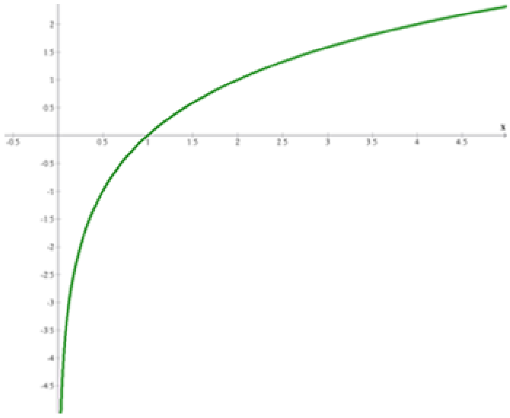
b)



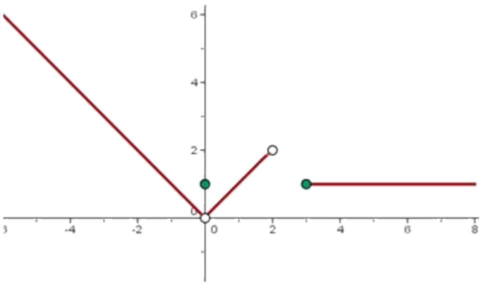
c)



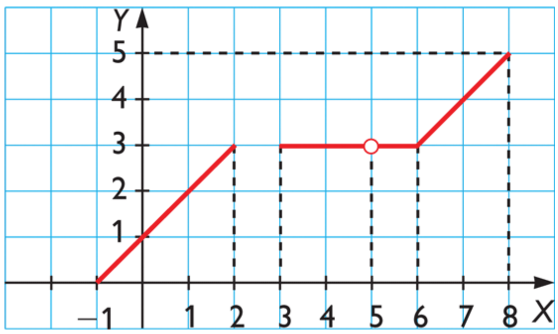
a)



e)



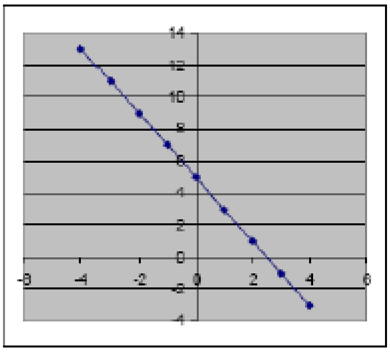
f)



3. Representa gráficamente las siguientes funciones y estudia su crecimiento, continuidad, dominio, recorrido, máximos y mínimos.

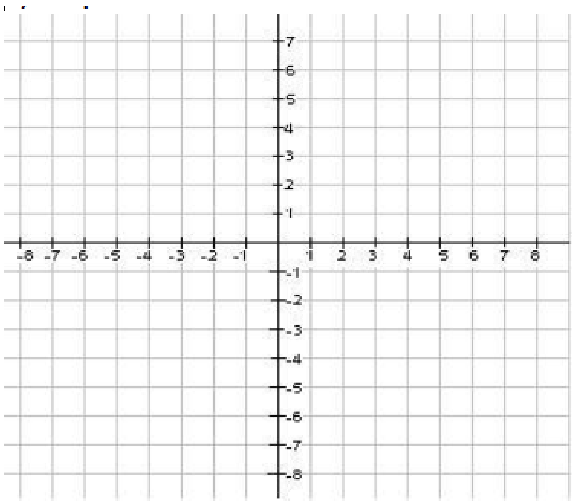
b) $y=|x|$
c) $y = 2x-4$
d) $y= -3x+1$

4. Dada la siguiente gráfica, indica cuál es su función:



a. $Y = -2x - 2$
b. $Y = 4X+5$
c. $Y = -2x +5$
d. $Y = -2x+2$

5. Representa las funciones afines:



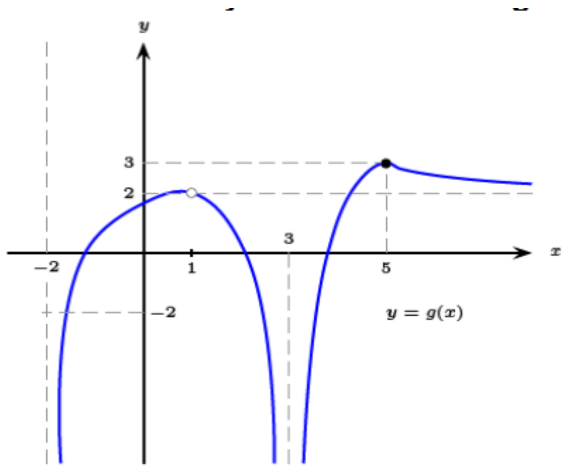
a) $y = -2x - 1$ b) $y = \frac{1}{2}x - 1$

X	Y
2	
1	
0	
-1	
-2	

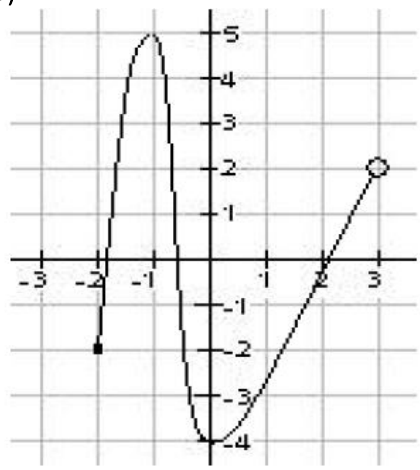
X	Y
2	
1	
0	
-1	
-2	

6. Analiza las siguientes funciones:

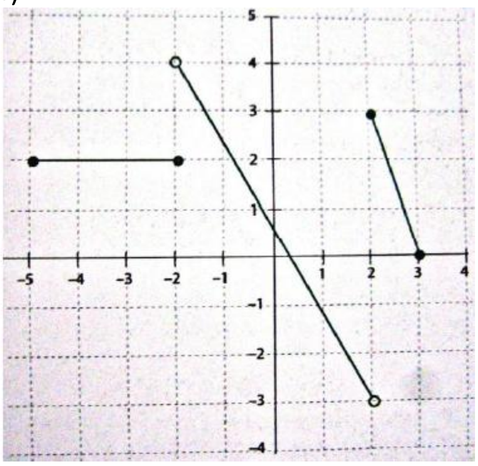
a)



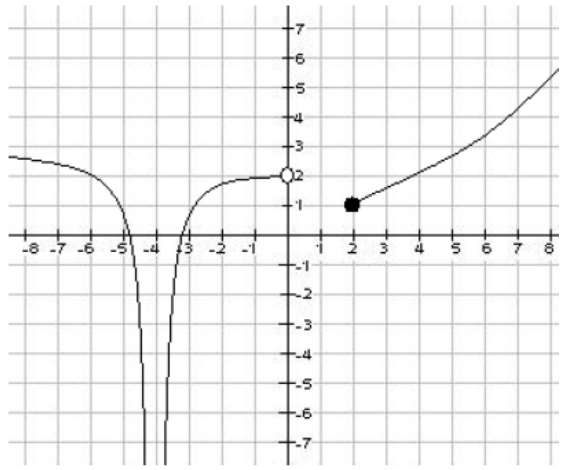
b)



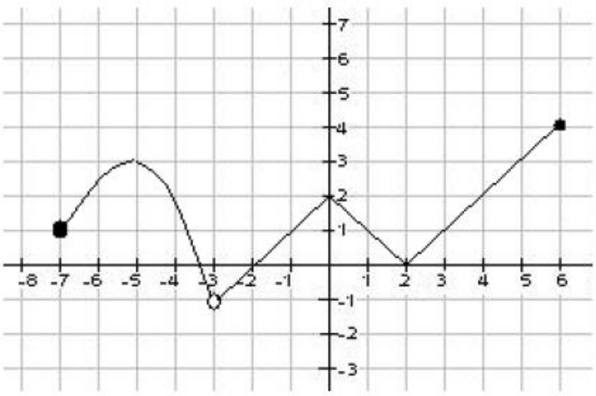
c)



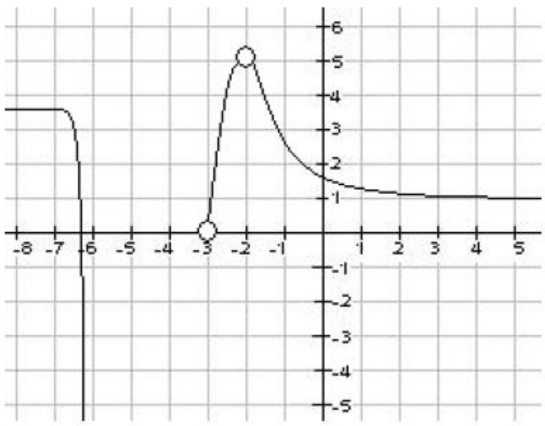
d)

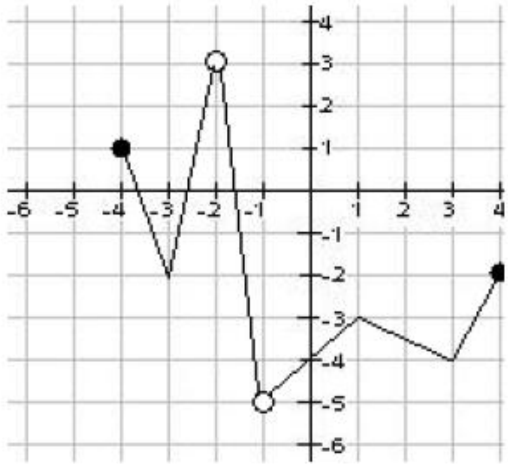


e)



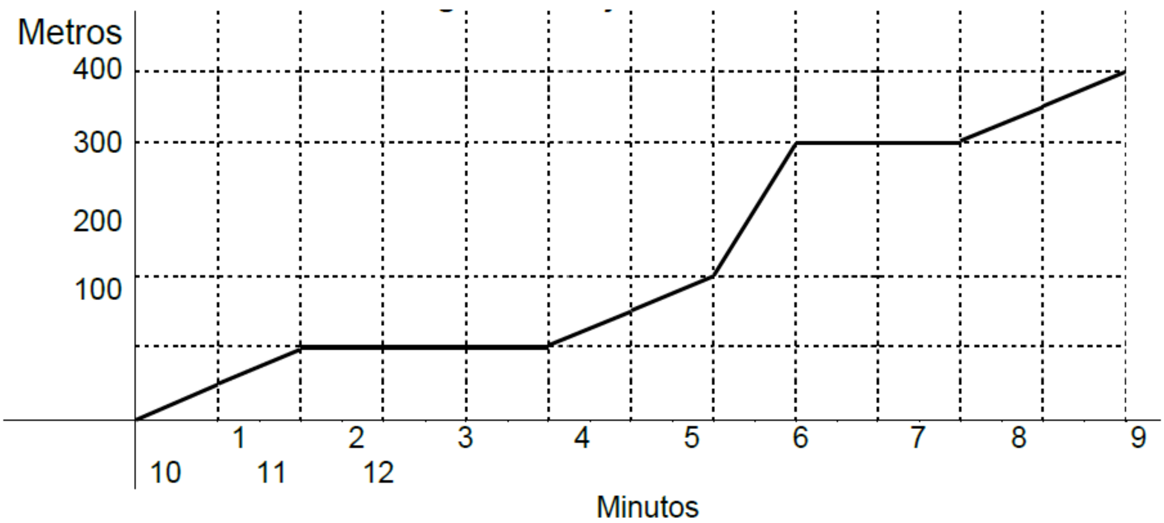
f)



g) 	

7. En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función afín que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

8. La siguiente gráfica representa la distancia recorrida y el tiempo empleado por Ana en ir desde su casa hasta el lugar de trabajo.



a) Indica la longitud del recorrido realizado por Ana
b) ¿Cuántas veces se para Ana a lo largo del recorrido y de cuánta duración?
c) ¿Cuál es el periodo de tiempo en el que Ana camina más deprisa?

9. Representa la función que cumple las siguientes características:

a) Su dominio es [-5, 3)
b) Es continua en el dominio
c) Tiene un máximo absoluto en (-4,3)
d) Es creciente en [-5, -4)
e) Es decreciente en el intervalo (-4,3)
f) Su recorrido es (-∞,3]

10. Representa la función que cumple las siguientes características:

a) Su dominio y su recorrido son R
b) Es continua en el dominio
c) Tiene un máximo relativo en (-5,6)
d) Es decreciente en (-5, 5)
e) Es simétrica respecto del origen de coordenadas

11. Representa la función que cumple las siguientes características:

a) Su dominio es [-6,6]
b) Su máximo absoluto es (-6,5)
c) Pasa por el origen de coordenadas
d) Sólo es decreciente en (-6, 0) y nunca es creciente

<u>Ejercicios de las pruebas de Acceso en Castilla-La Mancha</u>

12. La factura que establece el coste de la energía eléctrica se compone de un gasto fijo y de un gasto directamente proporcional al consumo realizado en Kwh. En dos facturas consecutivas se han pagado 35,7€ por 340 Kwh. de consumo y 31.14€ por 283 Kwh. de consumo respectivamente.

    a) Calcule el importe correspondiente al gasto fijo de la factura

    b) Determine la función que establece el coste (en €) de la factura en función del consumo en Kwh. De la misma. ¿Qué tipo de función es?

13. Sabiendo que la expresión del peso es P=mg, donde m es la masa y g la gravedad, y que la fuerza de la gravedad en la tierra vale 9,81 y en Venus 8,85.

a) ¿Cuánto pesaría Antonio en Venus si su peso en la tierra es de 70 kg?

b) Escribe y representa gráficamente la función que permite calcular el peso en Venus a partir del peso terrestre.

14. La altura media (en metros) de una determinada especie de pinos viene dada por la función:

$$h(t) = \frac{12t^2 - 3t + 1}{t^2 - 9t + 10}$$

Donde t expresa los años transcurridos desde su plantación.

a) ¿Qué altura media tienen los pinos al cabo de cinco años?
b) ¿En algún momento la altura de los pinos será de 5 metros?
c) ¿A cuánto tiende la altura media de estos árboles con el paso del tiempo?

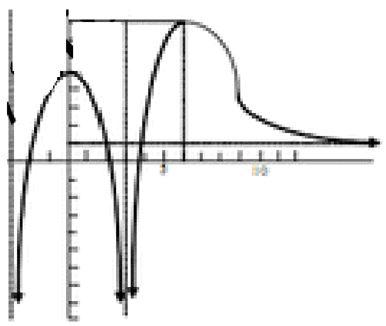
15. Un taller de lavado de coches ofrece dos modalidades de pago:

A: 12€ por hacerse socio y 6,5€ por cada lavado.

B: 8€ cada lavado si no es socio.

a) Escribe las funciones que expresan cada modalidad.
b) Representa dichas funciones.
c) Calcula el número de lavados que igualan las dos modalidades.

16. Dada la siguiente gráfica de f(x), calcula



a) Dominio y la imagen

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

c) Coordenadas de los máximos y mínimos absolutos

d) Continuidad de la función