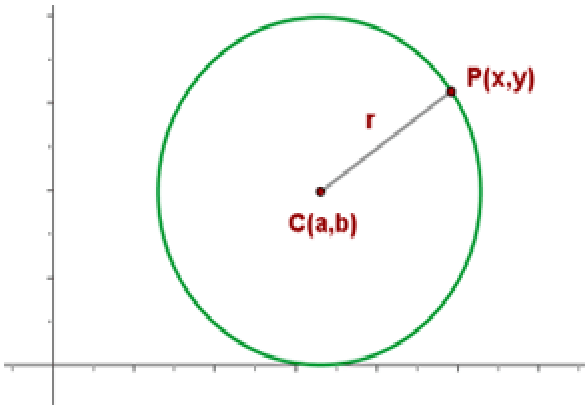
Bloque 2. Geometría

4. Iniciación a las Cónicas

1. La circunferencia

Se llama circunferencia al **lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro**.



$$d(C,P) = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Si desarrollamos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

y realizamos estos cambios:

$A = -2a \qquad B = -2b \qquad C = a^2 + b^2 - r^2$

Obtenemos otra forma de escribir la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Donde el centro es: $C\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$

y el radio cumple la relación: $r^2 = \left(\dfrac{A}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{B}{2}\right)^2 - C$

Ecuación reducida de la circunferencia

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas la ecuación queda reducida a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo- Escribir la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 2.

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

Ejemplo- Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, hallar el centro y el radio.

$$-2 = -2a \qquad a = 1$$

$$C(1, -2)$$

$$4 = -2b \qquad b = -2$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 \qquad -4 = 1 + 4 - r^2 \qquad r = 3$$

Ejemplo - Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2,0), B(2,3), C(1, 3).

Si sustituimos x e y en la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ por las coordenadas de los puntos se obtiene el sistema:

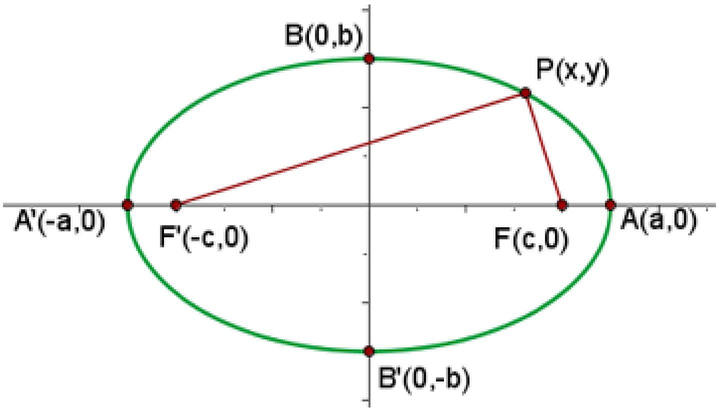
$$\begin{cases} 4 + 0 + 2A + 0 + C = 0 \\ 4 + 9 + 2A + 3B + C = 0 \\ 1 + 9 + A + 3B + C = 0 \end{cases}$$

$$A = -3 \qquad B = -3 \qquad C = 2$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$$

2. La elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

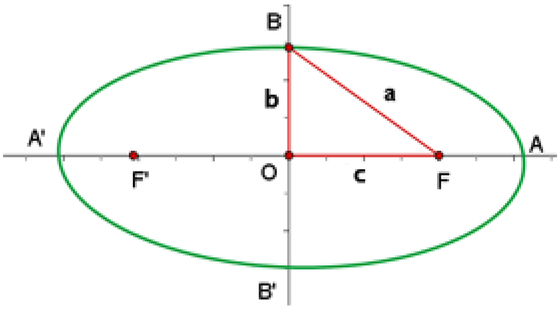


$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

Los elementos de la elipse son:

- **Focos**: Son los puntos fijos **F y F'**.
- **Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos.
- **Eje secundario**: Es la mediatriz del segmento FF'.
- **Centro:** Es el punto de intersección de los ejes.
- **Radios vectores:** Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: **PF** y **PF'**.
- **Distancia focal:** Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud **2c**, **c** es el valor de la **semidistancia focal**.
- **Vértices:** Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.
- **Eje mayor:** Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud **2a**, **a** es el valor del **semieje mayor**.
- **Eje menor:** Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud **2b**, **b** es el valor del **semieje menor**.
- **Ejes de simetría:** Son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.
- **Centro de simetría:** Coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.

Relación entre la distancia focal y los semiejes

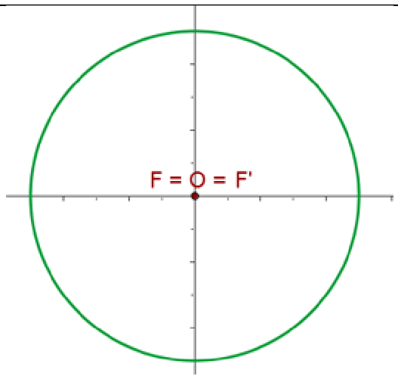


Se cumple que: $a^2 = b^2 + c^2$

Exentricidad de la elipse

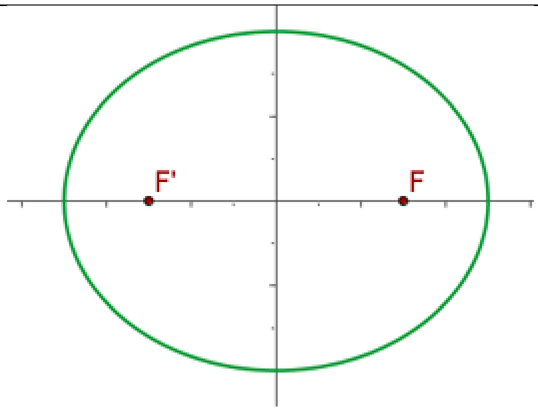
La excentricidad de la elips es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

$$e = \frac{c}{a} \qquad c \leq a \qquad 0 \leq e \leq 1$$

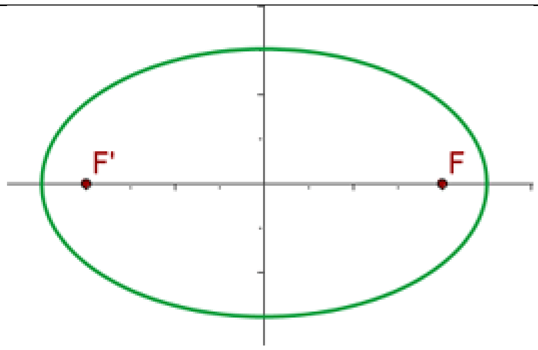


$c = 0$ $\quad b = a$

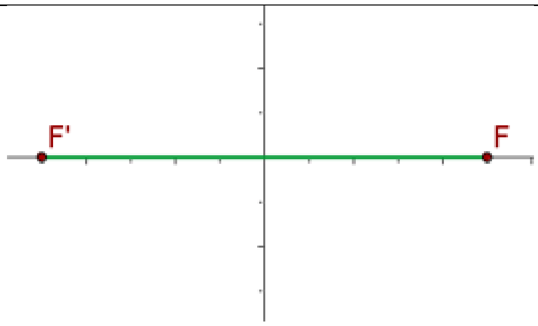
$e = 0$



$e = \frac{3}{5}$



$e = \frac{4}{5}$

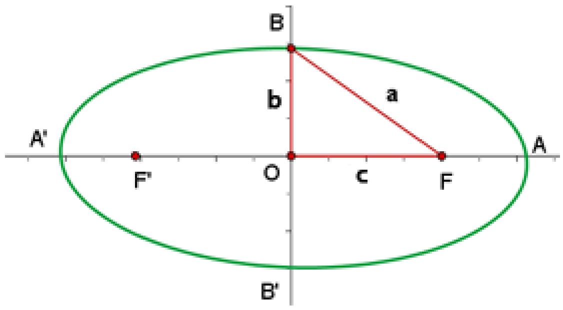


$c = a$ $\quad b = 0$

$e = 1$

Ecuación reducida de la elipse

Se toma como centro de la elipse el centro de coordenadas y los ejes de la elipse como ejes de coordenadas. Las coordenadas de los focos son:



F'(-c,0) y F(c,0)

Cualquier punto de la elipse cumple:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

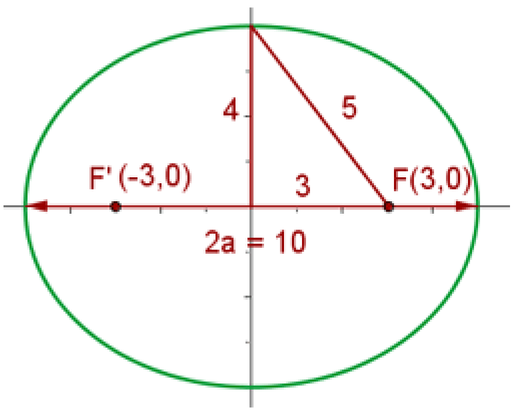
Esta expresión da lugar a:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Realizando las operaciones llegamos a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ejemplo - Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos: F'(-3,0) y F(3, 0), y su eje mayor mide 10.



Semieje mayor: $2a = 10$ $\quad a = 5$

Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 2c = 6$ $\quad c = 3$

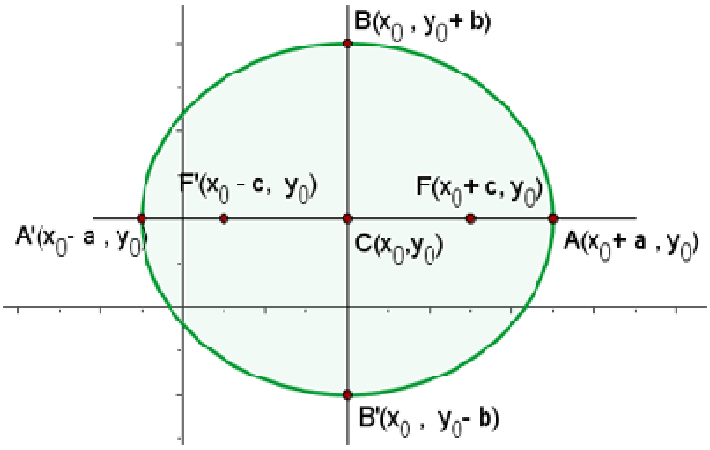
Semieje menor: $b^2 = 25 - 9$ $\quad b = 4$

Ecuación reducida: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Excentricidad: $e = \frac{3}{5}$

Ecuación de la elipse

Si el centro de la elipse **C(x_0,y_0)** y el eje principal es paralelo a OX, los focos tienen de coordenadas F(x_0+c, y_0) y F'(x_0−c, y_0). Y la ecuación de la elipse será:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Al quitar denominadores y desarrollar se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Donde **A y B tienen el mismo signo**.

Ejemplo - Hallar la ecuación de la elipse de foco F(7, 2), que tiene vértice A(9, 2) y de centro C(4, 2).

$$a=9-4=5 \qquad\qquad c=7-4=3$$

$$b=\sqrt{25-9}=4$$

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

Ejemplo - Dada la elipse de ecuación

$$\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

, hallar su centro, semiejes, vértices y focos.

$a^2 = 36 \qquad a = 6$

$b^2 = 16 \qquad b = 4$

$c = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} \qquad c = 2\sqrt{5}$

$C(6, -4)$

$A(12, -4) \qquad A'(0, -4)$

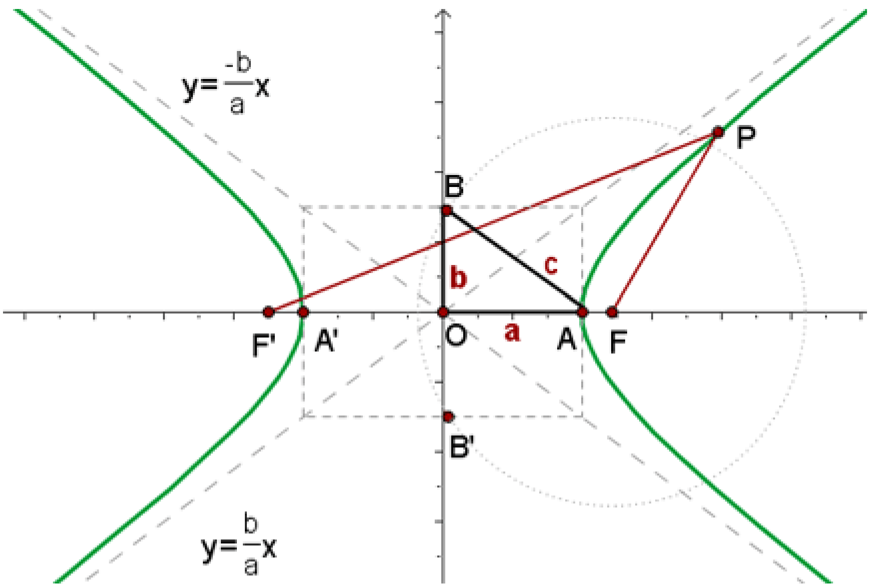
$F(6+2\sqrt{5}, -4) \qquad F'(6-2\sqrt{5}, -4)$

$B(6, 0) \qquad B'(6, -8)$

3. La hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$$



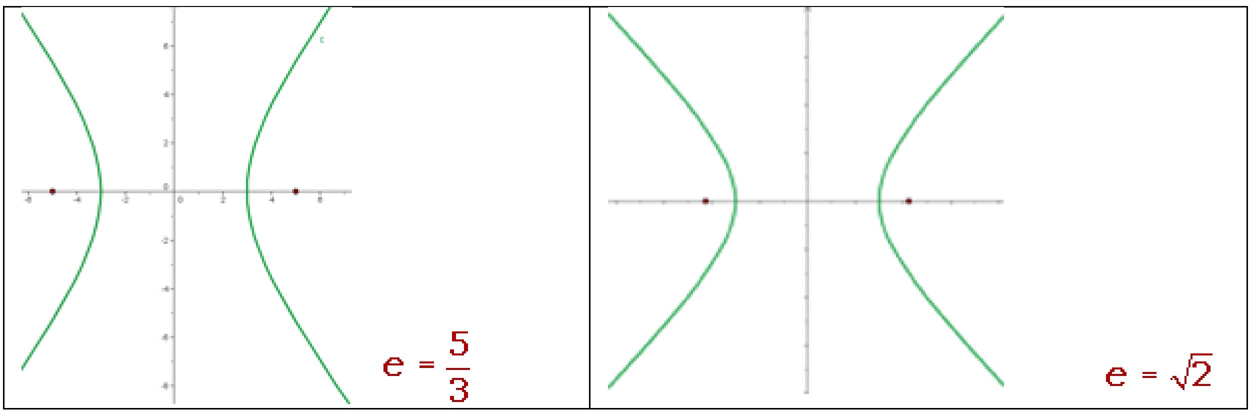
Elementos de la hipérbola

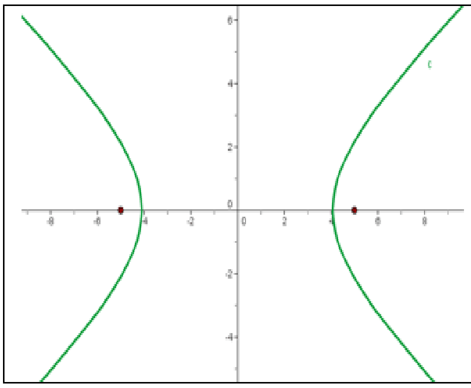
- **Focos**: Son los puntos fijos F y F'.
- **Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos.
- **Eje secundario o imaginario**: Es la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$.
- **Centro:** Es el punto de intersección de los ejes.
- **Vértices:** Los puntos A y A' son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal. Los puntos B y B' se obtienen como intersección del eje imaginario con la circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y de radio c.
- **Radios vectores:** Son los segmentos que van desde un punto de la hipérbola a los focos: PF y PF'.
- **Distancia focal:** Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud 2c.
- **Eje mayor:** Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud 2a.
- **Eje menor:** Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud 2b.
- **Ejes de simetría:** Son las rectas que contienen al eje real o al eje imaginario.
- **Asíntotas:** Son las rectas de ecuaciones: $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$
- **Relación entre los semiejes:** $c^2 = a^2 + b^2$

Excentricidad de la hipérbola

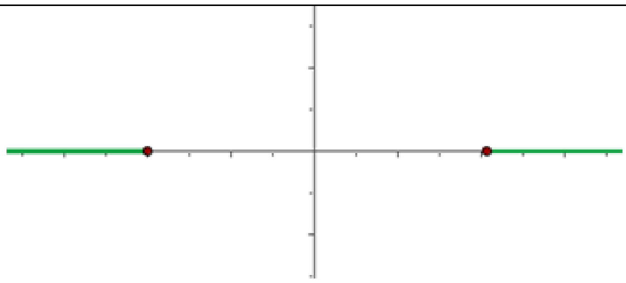
La excentricidad mide la abertura mayor o menor de las ramas de la hipérbola.

$$e = \frac{c}{a} \qquad c \geq a \qquad e \geq 1$$



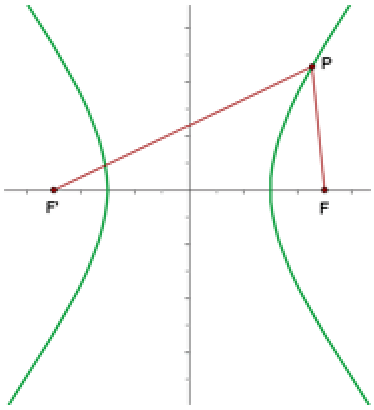


$e = \frac{5}{4}$



$e = 1$

Ecuación reducida de la hipérbola



Se llama ecuación reducida a la ecuación de la hipérbola cuyos ejes coinciden con los ejes coordenadas, y, por tanto, el centro de hipérbola con el origen de coordenadas.

Si el eje real está en el eje de abscisas las coordenadas de los focos son:

F'(−c,0) y F(c,0)

Cualquier punto de la hipérbola cumple:

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$$

Esta expresión da lugar a:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Realizando las operaciones y considerando que $b^2 = c^2 - a^2$, llegamos a:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ejemplo - Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(4, 0), de vértice A(2, 0) y de centro C(0, 0).

$$C(0,0), \qquad F(4,0), \qquad A(2,0)$$

$$a = 2 \qquad c = 4 \qquad b = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Ejemplo - Hallar la ecuación y la excentricidad de la hipérbola que tiene como focos los puntos F'(-5, 0) y F(5, 0), y 6 como diferencia de los radios vectores.

$$2a = 6 \qquad a = 3$$

$$c = 5 \qquad b = \sqrt{25-9} \qquad b = 4$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad e = \frac{5}{3}$$

Ejemplo - Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad de la hipérbola $9x^2$ - $16y^2$ = 144.

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

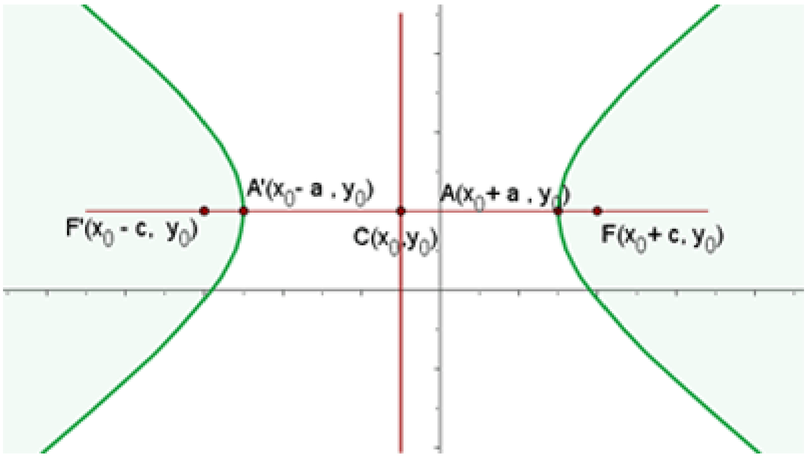
$$A(4,0) \qquad A' = (-4,0)$$

$$F = (5,0) \qquad F' = (-5,0)$$

$$y = \frac{3}{4}x \qquad y = -\frac{3}{4}x$$

$$e = \frac{5}{4}$$

Ecuación de la hipérbola



Si el **centro** de la hipérbola es **C(x_0, y_0)** y el eje principal es paralelo a OX, los **focos** tienen de coordenadas **F(x_0+c, y_0) y F'(x_0– c, y_0)**. Y la ecuación de la hipérbola será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Donde **A y B tienen signos opuestos**.

Ejemplo - Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(7, 2), de vértice A (5,2) y de centro C(3, 2).

$$C(3,2), \qquad F(7,2), \qquad A(5,2)$$

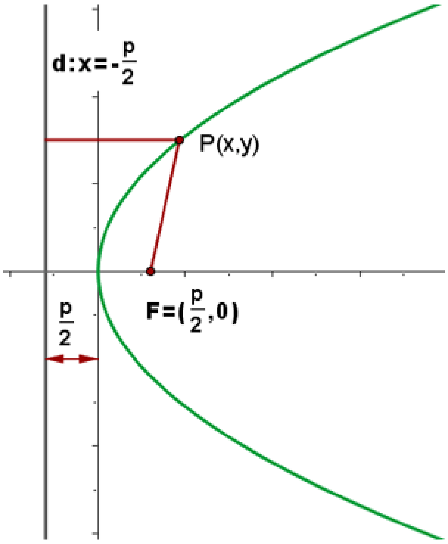
$$a=5-3=2 \qquad\qquad c=7-3=4$$

$$b=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$$

4. La parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



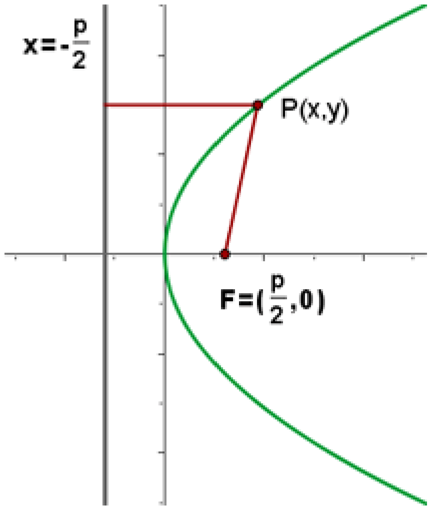
$$d(F,P) = d(P,d)$$

Elementos de la parábola

- **Foco**: Es el punto fijo F.
- **Directriz:** Es la recta fija d.
- **Parámetro:** Es la distancia del foco a la directriz, se designa por la letra p.
- **Eje:** Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
- **Vértice:** Es el punto de intersección de la parábola con su eje.
- **Radio vector:** Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.

Ecuación reducida de la parábola

El eje de la parábola coincide con el de abscisas y el vértice con el origen de coordenadas...

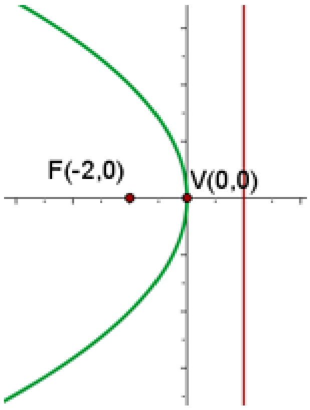


$$F\left(\frac{p}{2},0\right) \qquad x=-\frac{p}{2}$$

$$y^2=2px$$

Ejemplo - Dada la parábola

$y^2=-8x$ ***, calcular su vértice, su foco y la recta directriz.***

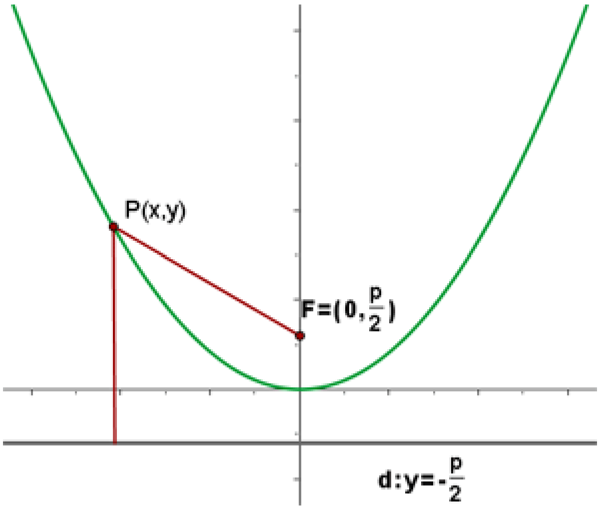


$$-2p=-8 \qquad \frac{p}{2}=2$$

$$V(0,0) \qquad F(-2,0) \qquad x=2$$

Ecuación reducida de la parábola

El eje de la parábola coincide con el de ordenadas y el vértice con el origen de coordenadas

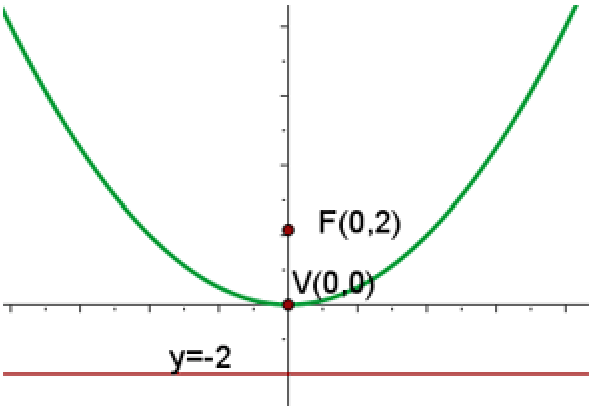


$$F\left(0, \frac{p}{2}\right) \qquad y = -\frac{p}{2}$$

$$x^2 = 2py$$

Ejemplo - Dada la parábola

$x^2 = 8y$ **, calcular su vértice, su foco y la recta directriz.**

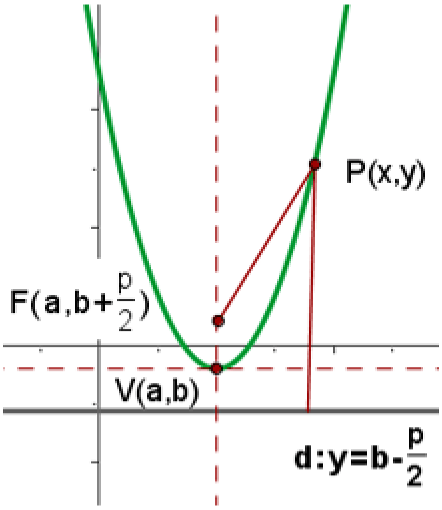


$$2p = 8 \qquad \frac{p}{2} = 2$$

$$V(0,0) \qquad F(0,2) \qquad y = -2$$

Ecuación de la parábola

Parábola con eje paralelo a OY, y vértice distinto al origen

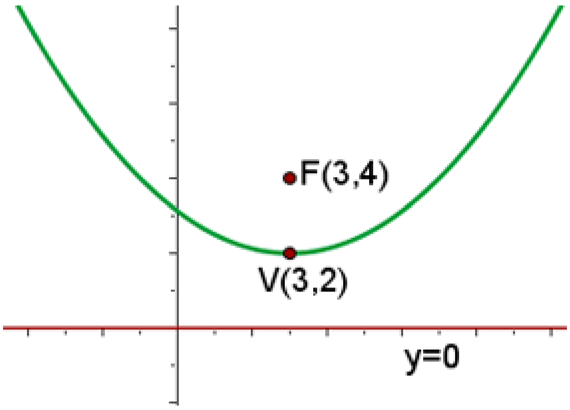


$$V(a, b) \qquad F\left(a, b + \frac{p}{2}\right) \qquad y = b - \frac{p}{2}$$

$$(x - a)^2 = 2p\,(y - b)$$

Dada la parábola

$(x - 3)^2 = 8(y - 2)$**, calcular su vértice, su foco y la recta directriz.**



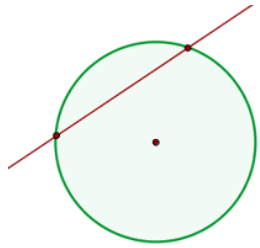
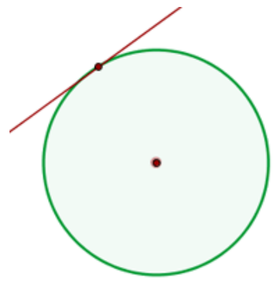
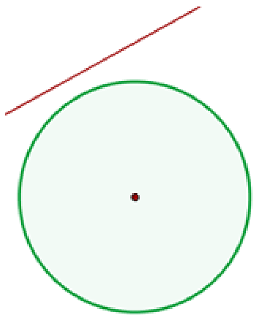
$$2p = 8 \qquad \frac{p}{2} = 2$$

$$V(3, 2) \qquad F(3, 4) \qquad y = 0$$

5. Intersección de una cónica y una recta

Para hallar los puntos comunes a una cónica y una recta **resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas**.

En general se obtiene un ecuación de segundo grado, que tendrá dependiendo del signo del discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, las siguientes soluciones:

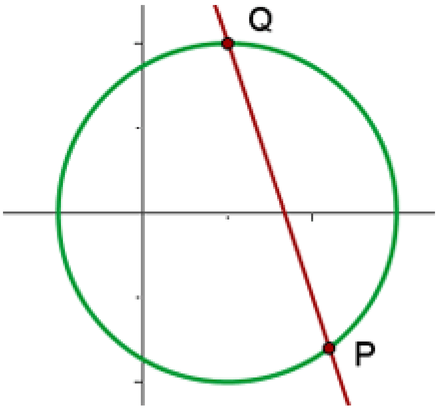
<u>Si Δ > 0</u>	**Dos soluciones: la recta y la cónica son secantes.** 
<u>Si Δ = 0</u>	**Una solución: la recta y la cónica son tangentes.** 
<u>Si Δ < 0</u>	**Ninguna solución: la recta y la cónica son exteriores.** 

Ejemplo- Calcula la posición relativa de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

y la recta

$$3x + y - 5 = 0.$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \qquad y = 5 - 3x$$

$$x^2 + (5 - 3x)^2 - 2x - 3 = 0$$

$$5x^2 - 16x + 11 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 220}}{10} = \frac{16 \pm 6}{10} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \dfrac{11}{5} \\ \searrow x_2 = 1 \end{array}$$

$$P\left(\frac{11}{5}, -\frac{8}{5}\right) \qquad Q(1,2)$$

Luegos son secantes

Ejercicios

1. Determina las coordenadas del centro y del radio de las circunferencias:

   a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 3x + y + 10 = 0$
   c) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$

2. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (2,-3) y es tangente al eje de abscisas.
3. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (-1, 4) y es tangente al eje de ordenadas.
4. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de la rectas $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$, y su radio es igual a 5.
5. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, y que pasa por el punto (-3,4).
6. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices:A(0, 0), B(3, 1), C(5, 7).
7. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A(-5,3) y B(3,1). ¿Cuál es la ecuación de esta circunferencia?
8. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.
9. Estudiar la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ con las rectas:

   a) $x + 7y -20 = 0$
   b) $3x + 4y - 27 = 0$
   c) $x + y - 10 = 0$

10. Representa gráficamente y determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes elipses.

a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$
b) $x^2 + 4y^2 = 16$
c) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
d) $3x^2 + 2y^2 = 6$

11. Representa gráficamente y determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes elipses.

a) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$
b) $25x^2 + 9y^2 - 18y - 216 = 0$
c) $x^2 + 3y^2 - 6x + 6y = 0$
d) $3x^2 + y^2 - 24x + 39 = 0$

12. Halla la ecuación de la elipse conociendo:

a) $C(0,0)$, $F(2,0)$, $A(3,0)$
b) $C(0,0)$, $F(0,4)$ $A(0,5)$
c) $C(1,-1)$, $F(1,2)$ $A(1,4)$
d) $C(-3,2)$, $F(-1,2)$ $A(2,2)$

13. Escribe la ecuación reducida de la elipse que pasa por el punto (2, 1) y cuyo eje menor mide 4.
14. La distancia focal de una elipse es 4. Un punto de la elipse dista de sus focos 2 y 6, respectivamente. Calcular la ecuación reducida de dicha elipse.
15. Escribe la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos: $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
16. Hallar las coordenadas del punto medio de la cuerda que intercepta la recta: x + 2y - 1 = 0 en la elipse de ecuación: $x^2 + 2y^2 = 3$.
17. Determina la ecuación reducida de un elipse cuya distancia focal es $8\sqrt{6}$ y el área del rectángulo construidos sobre los ejes 80 u^2.
18. Hallar la ecuación de lugar geométrico de los puntos P(x. y) cuya suma de distancias a los puntos fijos (4, 2) y (-2, 2) sea igual a 8.
19. Determina la ecuación reducida de una elipse sabiendo que uno de los vértices dista 8 de un foco y 18 del otro.
20. Halla la ecuación reducida de una elipse sabiendo que pasa por el punto (0, 4) y su excentricidad es 3/5.
21. Representa gráficamente y determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$
b) 2 $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$
c) 3 $2x^2 - 3y^2 = 30$
d) 4 $9y^2 - 16x^2 = 1296$

22. Representa gráficamente y determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes hipérbolas:

   a) 1 $4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0$
   b) $y^2 - 2x^2 - 4x - 4y = 0$

23. Hallar la ecuación de una hipérbola de eje focal 8 y distancia focal 10.
24. El eje focal de una hipérbola mide 12, y la curva pasa por el punto P(8, 14). Hallar su ecuación.
25. Calcular la ecuación reducida de la hipérbola cuya distancia focal es 34 y la distancia de un foco al vértice más próximo es 2.
26. Determina la ecuación reducida de una hipérbola que pasa por los puntos $(4, \sqrt{8})$ y $(2\sqrt{3}, 2)$.
27. Determina la ecuación reducida de una hipérbola que pasa por el punto $(2, \sqrt{3})$ y su excentricidad es $\sqrt{3}$.
28. Determina la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que un foco dista de los vértices de la hipérbola 50 y 2.
29. Determina la posición relativa de la recta $x + y - 1 = 0$ con respecto a la hipérbola de ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$.
30. Una hipérbola equilátera pasa por el punto (4, 1/2). Halla su ecuación referida a sus asíntotas como ejes, y las coordenadas de los vértices y los focos.
31. Determinar, en forma reducida, las ecuaciones de las siguientes parábolas, indicando el valor del parámetro, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

   a) $6y^2 - 12x = 0$
   b) $2y^2 = -7x$
   c) 3 $15x^2 = -42y$

32. Determina las ecuaciones de las parábolas que tienen:

   a) De directriz x = -3, de foco (3, 0).
   b) De directriz y = 4, de vértice (0, 0).
   c) De directriz y = -5, de foco (0, 5).
   d) De directriz x = 2, de foco (-2, 0).
   e) De foco (2, 0), de vértice (0, 0).
   f) De foco (3, 2), de vértice (5, 2).
   g) De foco (-2, 5), de vértice (-2, 2).
   h) De foco (3, 4), de vértice (1, 4).

33. Calcular las coordenadas del vértice y de los focos, y las ecuaciones de la directrices de las parábolas:

a) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$
b) 2 $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$
c) 3 $y = x^2 - 6x + 11$

34. Hallar la ecuación de la parábola de eje vertical y que pasa por los puntos: A(6, 1), B(-2, 3), C(16, 6).
35. Determina la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta: y= 0 y por foco el punto (2, 4).
36. Calcular la posición relativa de la recta r ≡ x + y - 5 = 0 respecto a la parábola $y^2 = 16$ x.