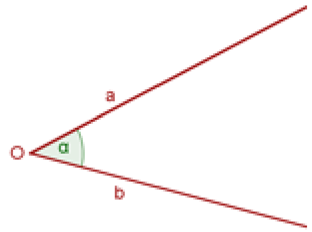
Bloque 2. Geometría

1. Trigonometría

1. Medida de ángulos

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama lados y al origen común vértice.

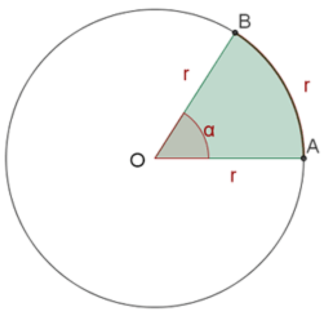


El ángulo es positivo si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo en caso contrario.

Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

Grado sexagesimal (°): Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal. Un grado tiene 60 minutos (') y un minuto tiene 60 segundos ('').

Radián (rad): Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.



2π rad = 360°　　　　π rad = 180°

Para pasar de grados a radianes (¿30º $\longrightarrow$ rad?):

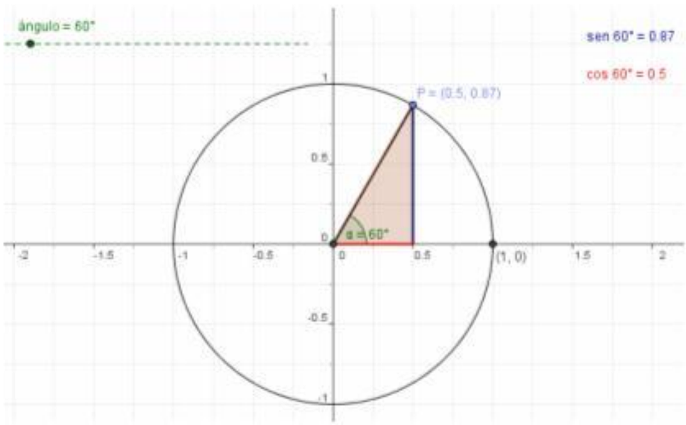
$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180°}{30°} \qquad \alpha = \frac{30°\pi}{180°} = \frac{\pi}{6} rad$$

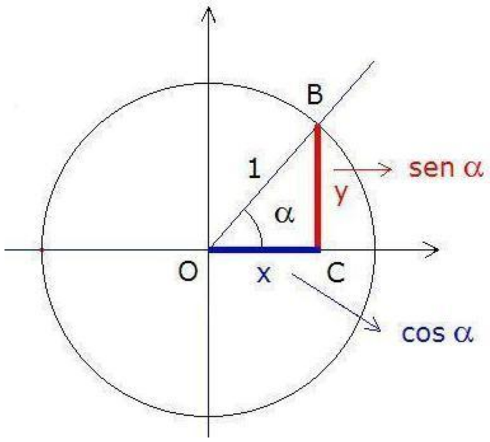
Para pasar de radianes a grados (¿ π/3 rad $\longrightarrow$ º?):

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{180°}{\alpha} \qquad \alpha = \frac{180° \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180°}{3} = 60°$$

2. Razones trigonométricas

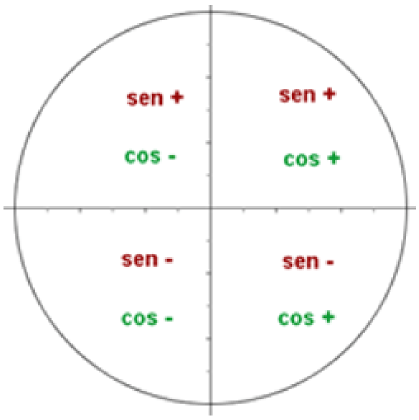
Para entender las razones trigonométricas, partimos de la circunferencia goniométrica: es una circunferencia de longitud de radio 1, sobre unos ejes XY. Sobre ella, podemos trazar ángulos que formarán al proyectarlos sobre los ejes un triángulo rectángulo.





El seno del ángulo será la proyección del ángulo sobre el eje Y, el coseno del ángulo será la proyección sobre el eje X, y la tangente será el cociente resultante de dividir seno por coseno. En el ejemplo, podemos ver que el punto P (donde se cortan la semirrecta del ángulo y la circunferencia), tiene como coordenadas X=0,5 (que es el valor del coseno) e Y=0,87 (que es el valor del seno).

Como el radio es 1, eso implica .que tanto el seno como el coseno siempre van a tener un valor entre -1 y +1 (incluidos). Es decir, tanto el seno como el coseno de cualquier ángulo estarán en el intervalo [-1,1]



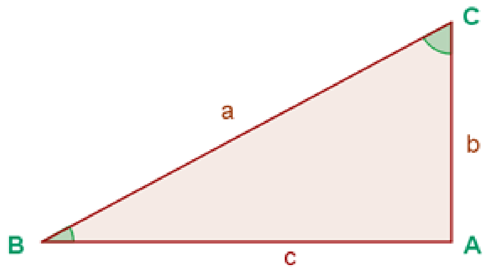
α :	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0	$\to \infty$	0	$\to -\infty$

3. Razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo

<u>**Seno del ángulo B**</u>: es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa**.

Se denota por **sen B**.

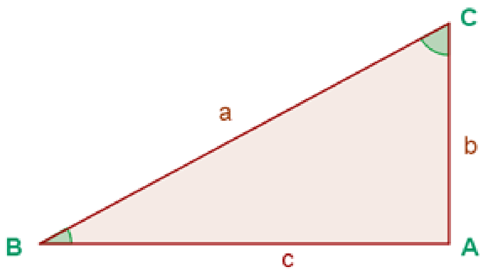
$$\text{sen B}= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$



<u>**Coseno del ángulo B**</u>: es la **razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa**.

Se denota por **cos B**.

$$\cos \text{B}= \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$



<u>**Tangente del ángulo B**</u>: es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo**.

Se denota por **tg B**.

$$\text{tg B}= \frac{\text{sen B}}{\cos \text{B}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

<u>**Cosecante del ángulo B**</u>: es la **razón inversa del seno de B**.

Se denota por **cosec B**.

$$\text{cosec B}= \frac{1}{\text{sen B}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante del ángulo B: es la **razón inversa del coseno de B**.

Se denota por **sec B**.

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente del ángulo B: es la **razón inversa de la tangente de B**.

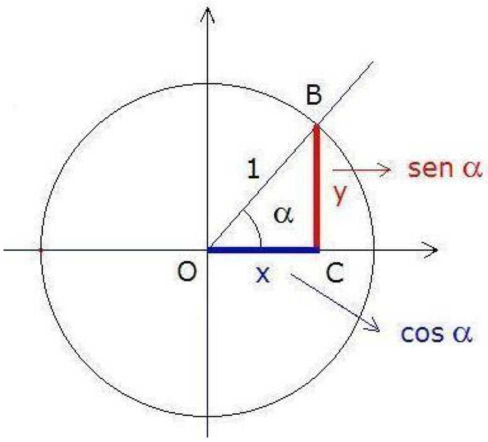
Se denota por **cotg B**.

$$\text{cotg } B = \frac{1}{\text{tg } B} = \frac{\cos B}{\text{sen } B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

4. Fórmula Fundamental: Identidades notables trigonométricas

La fórmula fundamental de la trigonometría es: **$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$**

Esta propiedad se verifica por el teorema de Pitágoras que dice que la suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado. Si observamos en la circunferencia goniométrica en la siguiente figura, vemos que el triángulo que forman OB, x e y es rectángulo. La hipotenusa es OB, cuya longitud es 1, ya que corresponde al radio de la circunferencia goniométrica, el cateto x corresponde al coseno del ángulo, mientras que el cateto y corresponde al seno del ángulo. Por tanto, la suma de los catetos al cuadrado (es decir, el coseno al cuadrado más el seno al cuadrado), corresponde a la hipotenusa al cuadrado (y como la hipotenusa es 1, su cuadrado también es 1).



$h^2=c_1^2+c_2^2 \rightarrow OB^2= x^2 + y^2 \rightarrow 1^2 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha \rightarrow 1 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha$

De aquí se derivan otras dos propiedades importantes:

- Si dividimos ambos miembros de la fórmula anterior por el cuadrado del coseno, obtenemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \rightarrow \ tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$$

- Si dividimos ambos miembros de la fórmula fundamental por el cuadrado del seno, obtenemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \rightarrow \ 1 + cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$$

Ejercicios de ejemplo:

Sabiendo que sen α = 3/5, y que 90º <α <180°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \qquad \sec \alpha = -\frac{5}{4}$$

Nota: el coseno será negativo al estar el ángulo en el segundo cuadrante.

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \qquad \text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$$

Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$$

Nota: el coseno será negativo al estar el ángulo en el tercer cuadrante.

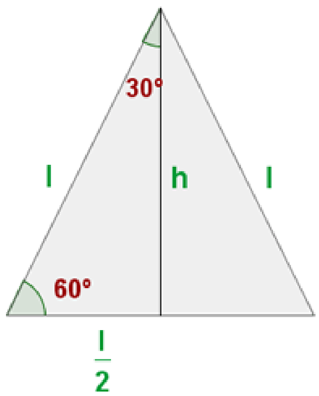
$$\text{sen } \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cosec } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = 2 \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{1}{2}$$

5. Razones trigonométricas de ángulos notables

Seno, coseno y tangente de 30º y 60º

Si dibujamos un triángulo equilátero ABC, cada uno de sus tres ángulos mide 60º y, si trazamos una altura del mismo, h, el ángulo del vértice A por el que la hemos trazado queda dividido en dos iguales de 30º cada uno. Recurriendo al Teorema de Pitágoras, tenemos que la altura es:



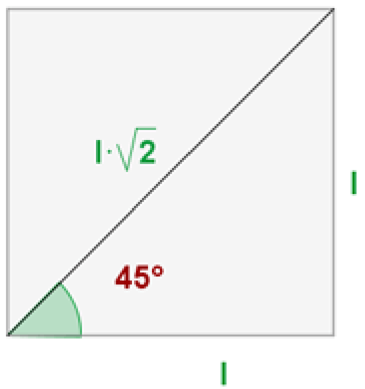
$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3l^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,l$$

$$\text{sen } 30^\circ=\frac{\frac{l}{2}}{l}=\frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60^\circ=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,l}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\ 30^\circ=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,l}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\ 60^\circ=\frac{\frac{l}{2}}{l}=\frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60^\circ=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

Seno, coseno y tangente de 45º



$$d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ=\frac{l}{l\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ=\frac{l}{l\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

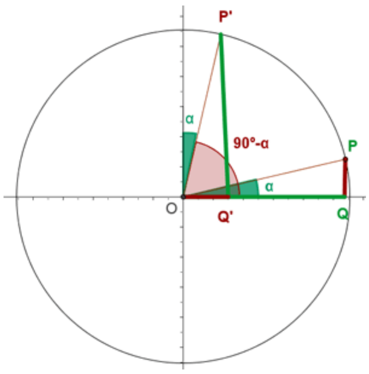
$$\text{tg } 45^\circ=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

En resumen

α:	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to \infty$	0	$\to -\infty$

6. Relación entre las razones de diferentes ángulos

Entre ángulos complementarios: Son aquéllos cuya suma es 90º ó π /2 radianes.

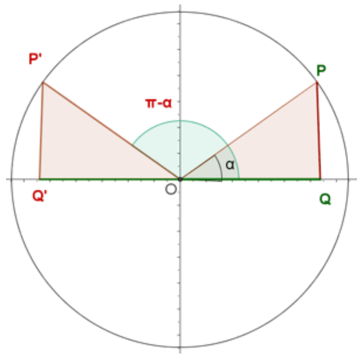


sen (90º - α) = cos α

cos (90º - α) = sen α

tg (90º - α) = cotg α

Entre ángulos suplementarios: Son aquéllos cuya suma es 180° ó π radianes.

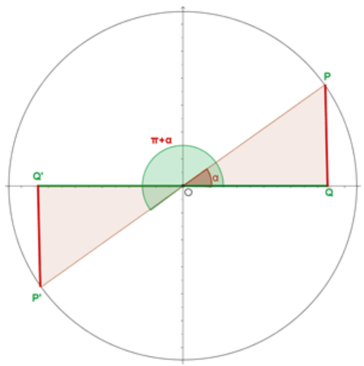


sen (180º - α) = sen α

cos (180º - α) = -cos α

tg (180º - α) = -tg α

Entre ángulos que se diferencian en 180: Son aquéllos cuya resta es 180° ó π radianes.

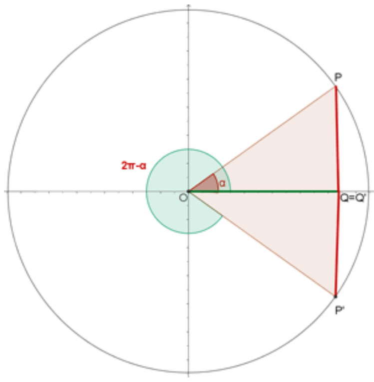


sen (180º + α) = -sen α

cos (180º + α) = -cos α

tg (180º + α) = tg α

Entre ángulos opuestos: Son aquéllos cuya suma es 360º ó 2 π radianes.



sen (-α) = -sen α

cos (-α) = cos α

tg (-α) = tg α

7. Resolución de triángulos rectángulos

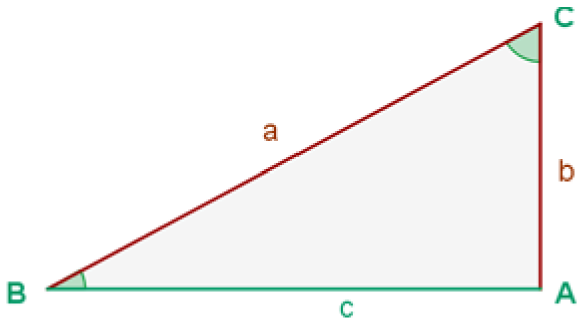
Resolver un triángulo es hallar sus lados, ángulos y área. Es necesario conocer dos lados del triángulo, o bien un lado y un ángulo distinto del recto.

Caso 1. Se conocen la hipotenusa y un cateto

$$B: \ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad B = \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$c: \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} \quad c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo a = 415 m y b = 280 m.

sen B = 280/415 = 0.6747   B = arc sen 0.6747 = 42° 25′

C = 90° - 42°   25′ = 47° 35′

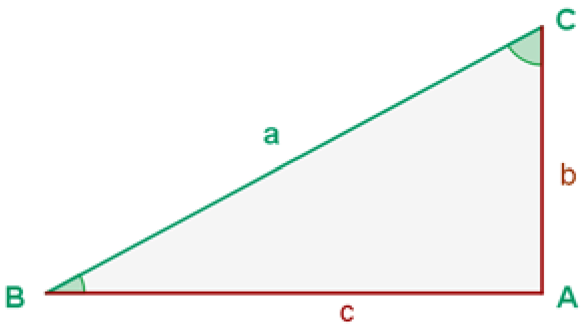
c = a cos B   c = 415 · 0.7381 = 306. 31 m

Caso 2. Se conocen los dos catetos

$$B: \ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \qquad B = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{c}$$

$$C = 90° - B$$

$$a: \begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \quad a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo b = 33 m y c = 21 m .

tg B = 33/21 = 1.5714 B = 57° 32′

C = 90° − 57° 32′ = 32° 28′

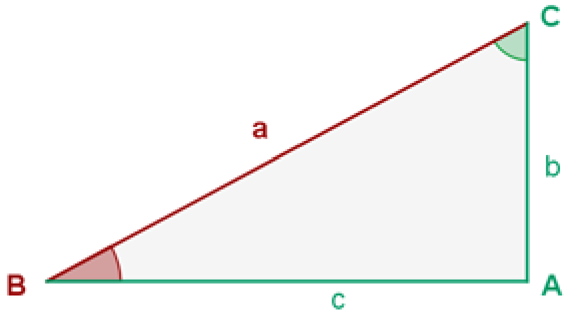
a = b/sen B a = 33/0.8347 = 39.12 m

Caso 3. Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo

$$C = 90° - B$$

$$b: \ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad b = a \cdot \operatorname{sen} B$$

$$c: \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} \quad c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo a = 45 m y B = 22°.

C = 90° - 22° = 68°

b = a sen 22° b = 45 · 0.3746 = 16.85 m

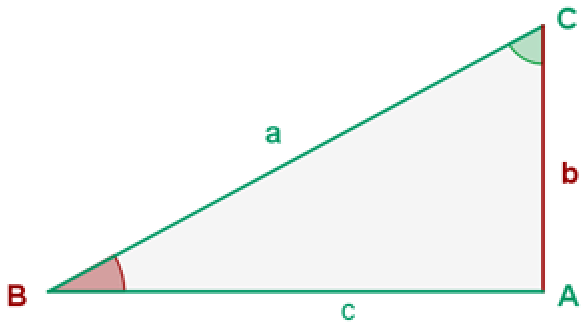
c = a cos 22° c = 45 · 0.9272 = 41.72 m

4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo

$$C = 90^\circ - B$$

$$a:\ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$c: \begin{cases} \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b} \quad c = b \cdot \operatorname{cotg} B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo b = 5.2 m y B = 37º

C = 90° - 37° = 53º

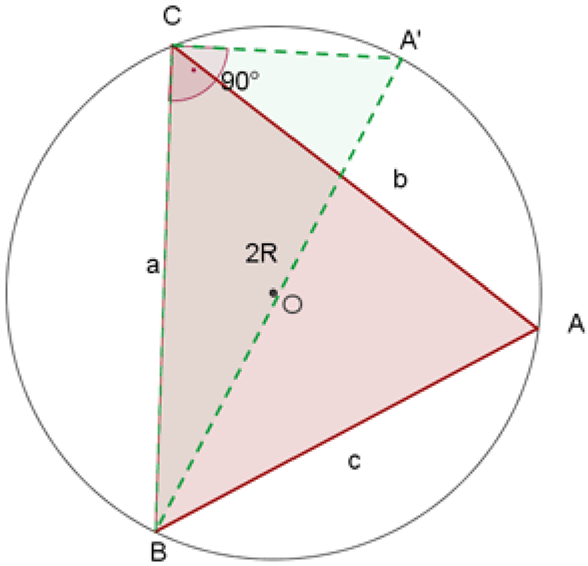
a = b/sen B   a = 5.2/0.6018 = 8.64 m

c = b · cotg B   c = 5.2 · 1.3270 = 6. 9 m

8. Teorema de los senos

El teorema de los senos dice que **cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.**

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$



Ejemplo – Si se conoce que a =15 y A=45 grados y B=35 grados, entonces b se calcula como:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$$

$$\frac{15}{sen\,45} = \frac{b}{sen\,35}$$

$$b = \frac{15 \cdot sen\,35}{sen\,45} = 12{,}17$$

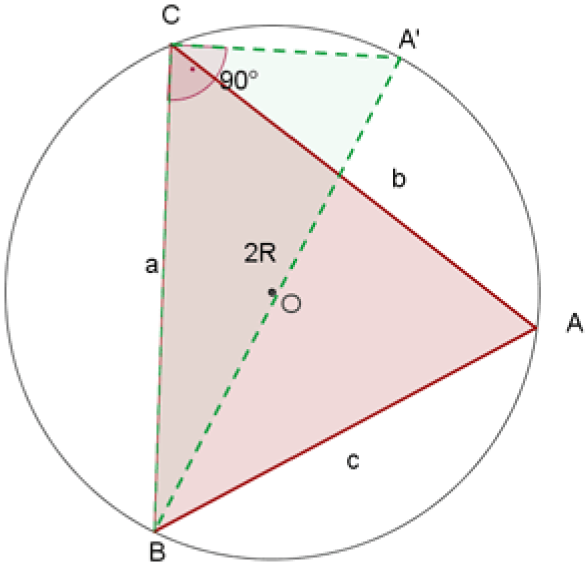
9. Teorema del coseno

El teorema del coseno dice que **en un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$



Ejemplo – Si se conoce que a =15 y A=45 grados y B=35 grados, entonces b se calculó con valor 12,17 por el teorema de los senos, según el teorema del coseno podemos calcular c, sabiendo que C = 180 – 35 -45 = 100:

$$c^2 = 15^2 + 12{,}17^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12{,}17 \cdot \cos 100 = 225 + 148{,}11 + 63{,}4 = 436{,}51$$

Por lo que c = $\sqrt{436{,}51} = 20{,}89$

Ejercicios

1. **Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos:**

13 rad

22π/5 rad.

33π/10 rad.

2. **Expresa en radianes los siguientes ángulos:**

1316°

2 10°

3 127º

3 **Sabiendo que cos α = ¼ , y que 270º <α <360°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.**

4 **Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.**

5 **Sabiendo que sec α = 2, 0< α < π /2, calcular las restantes razones trigonométricas.**

6 **Calcula las razones de los siguientes ángulos:**

225°, 330°, 2655°, −840º

7. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo**

8. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54.6°. Resolver el triángulo.**

9. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.**

10. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.**

11. **Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.**

12. **Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?**

13. **Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°**

14. **Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.**

15. **Sabiendo que cosec α = 3, calcular las restantes razones trigonométricas.**

<u>Ejercicios de trigonometría las pruebas de acceso</u>

16**. Una escalera de tijera está abierta de manera que sus dos patas forman un ángulo de 40º. Las patas de la escalera están separadas por 1,2 m. calcula la altura a la que llega la escalera y la longitud de cada pata.** *[Solución: 1,75 y 1,64]*

17. En el patio de una casa hay dos árboles. Uno de ellos está a una distancia de 6 metros de la puerta de la casa. Si nos situamos en él, observamos que el ángulo que forman las líneas que unen éste árbol con la puerta de la casa y éste árbol con el otro es de 25º. Si vamos al segundo árbol, observamos que el ángulo que forman las líneas que unen éste árbol con la puerta de la casa y con el otro árbol es de 30º. Calcula la distancia desde la puerta de la casa al segundo de los árboles y la distancia que separa a los dos árboles. *[Solución: 2,8 y 4,85]*

18. Dos poblaciones (A y B) distan entre sí 14 km. Queremos calcular la longitud mínima de zanja necesaria para llevar agua desde un punto (C) hasta el camino que une a ambas ciudades. Contamos con los siguientes datos: el ángulo formado AB y AC mide 33º y el ángulo formado por CB y BA mide 28º.

a)¿Cuál es la longitud? (Aproximar a las milésimas).

b)¿Qué distancia separa cada ciudad del punto de conexión? (Aproximar a las milésimas).

[Soluciones: 4’1, 7’69 y 6’31]

19. Desde el lugar donde me encuentro la visual del edificio forma un ángulo de 42º. Si me acerco 20 m, el ángulo es de 55º. ¿Cuánto mide el edificio?

[Solución: 48,49]

20. Desde los extremos A y B de un barranco, que están a la misma altura, se observa un punto C del fondo del barranco con ángulos de 40º y 25º respecto a la dirección AB, como ilustra el siguiente dibujo. Si la profundidad del barranco es de 10 m, halla la longitud de un puente que une los puntos A y B.

[Solución: 33,36]

21. Un rombo tiene 30 m cuadrados de superficie y su ángulo menor es de 24 grados. Calcule la longitud de su lado. *[Solución: 8'59]*

22. Para medir la altura de una torre, nos situamos en un cierto punto y medimos el ángulo con el que se ve la parte más alta, obteniendo un valor de 60 grados y 20'. Nos alejamos en línea recta 50 m y volvemos a medir el ángulo, obteniendo ahora 32º y 11'. Halla la altura de la torre*. [Solución: 49'02]*