Bloque 1. Aritmética y Álgebra

13. Inecuaciones

1. Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebráicas.

<	**menor que**	**$2x - 1 < 7$**
≤	**menor o igual que**	**$2x - 1 \leq 7$**
>	**mayor que**	**$2x - 1 > 7$**
≥	**mayor o igual que**	**$2x - 1 \geq 7$**

La solución de una inecuación es el conjunto de valores de la variable que verifica la inecuación. Podemos expresar la solución de la inecuación mediante una representación gráfica o mediante un intervalo.

$2x - 1 < 7$

$2x < 8$ $x < 4$

$(-\infty, 4)$

Dos inecuaciones serán equivalentes si tienen el mismo con junto de soluciones. Las propiedades de las inecuaciones son las siguientes:

1) **Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo número**, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

   $3x + 4 < 5$ $3x + 4 - 4 < 5 - 4$ $3x < 1$

2) **Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número positivo**, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

   $2x < 6$ $2x : 2 < 6 : 2$ $x < 3$

3) **Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número negativo**, la inecuación resultante cambia de sentido y es equivalente a la dada.

$-x < 5 \qquad (-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) \qquad x > -5$

2. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Consideremos la inecuación:

$$2 - \left[-2 \cdot (x+1) - \frac{x-3}{2}\right] \le \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

La resolveremos aplicando los siguientes pasos:

1) ***Quitar corchetes.***

$$2 - \left(-2x - 2 - \frac{x-3}{2}\right) \le \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

2) ***Quitar paréntesis.***

$$2 + 2x + 2 + \frac{x-3}{2} \le \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

3) ***Quitar denominadores.***

$$24 + 24x + 24 + 6 \cdot (x-3) \le 8x - (5x-3) + 36x$$

$$24 + 24x + 24 + 6x - 18 \le 8x - 5x + 3 + 36x$$

4) ***Agrupar los términos en x a un lado de la desigualdad y los términos independientes en el otro.***

$$24x + 6x - 8x + 5x - 36x \le 3 - 24 - 24 + 18$$

5) ***Efectuar las operaciones***

$$-9x \le -27$$

6) Como el coeficiente de la x es negativo multiplicamos por −1, por lo que cambiará el sentido de la desigualdad.

$9x \geq 27$

7) Despejamos la incógnita.

$x \geq 3$

Obtenemos la solución como una desigualdad, pero ésta también podemos expresarla:

De forma gráfica:

Como un intervalo:

[3, +∞)

3. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Consideremos la inecuación:

$\mathbf{x^2 - 6x + 8 > 0}$

La resolveremos aplicando los siguientes pasos:

1º) Igualamos el polinomio del primer miembro a cero y obtenemos las raíces de la ecuación de segundo grado.

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \searrow x_2 = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

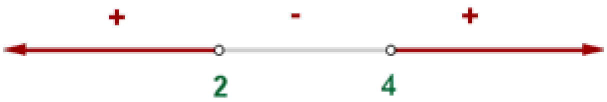
2º) Representamos estos valores en la recta real. Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo:

P(0) = 02 − 6 · 0 + 8 > 0

P(3) = 32 − 6 · 3 + 8 = 17 − 18 < 0

P(5) = 52 − 6 · 5 + 8 = 33 − 30 > 0

3º) La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo que el polinomio.



$$S = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$

Otro ejemplo:

$x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Como da una única solución, el polinomio se puede escribir como $(x + 1)^2 \geq 0$

Como un número elevado al cuadrado es siempre positivo la solución es todos los números reales, o sea, $\mathbb{R}$

De esta forma, se pueden calcular rápidamente soluciones a inecuaciones de segundo grado que representen identidades notables:

Inecuación	***Identidad notable equivalente***	***Solución***
$x^2 + 2x + 1 \geq 0$	$(x + 1)^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + 2x + 1 > 0$	$(x + 1)^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{-1\}$
$x^2 + 2x + 1 \leq 0$	$(x + 1)^2 \leq 0$	$x = -1$
$x^2 + 2x + 1 < 0$	$(x + 1)^2 < 0$	$\varnothing$

Otro ejemplo:

$$x^2 + x + 1 > 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Cuando no tiene raíces reales, le damos al polinomio cualquier valor, y si:

a. ***El signo obtenido coincide con el de la desigualdad, la solución es*** $\mathbb{R}$ ***.***
b. ***El signo obtenido no coincide con el de la desigualdad, no tiene solución.***

Inecuación	***Solución***
$x^2 + x + 1 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + x + 1 > 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 + x + 1 \leq 0$	$\varnothing$
$x^2 + x + 1 < 0$	$\varnothing$

4. Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Se resuelve cada inecuación por separado, siendo el conjunto solución del sistema la intersección de los conjuntos soluciones de ambas inecuaciones.

Ejemplos:

$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 1 \\ -x + 2 \geq -1 \end{cases}$$

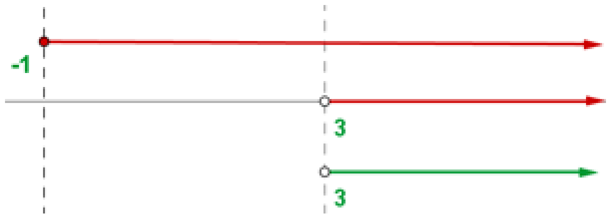
$2x + 3 \geq 1 \qquad 2x \geq 1 - 3 \qquad 2x \geq -2 \qquad x \geq -1$

$-x + 2 \geq -1 \qquad -x \geq -1 - 2 \qquad -x \geq -3 \qquad x \leq 3$

[−1, 3]

$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 1 \\ -x + 2 < -1 \end{cases}$$

$2x + 3 \geq 1$	$2x \geq -2$	$x \geq -1$
$-x + 2 < -1$	$-x < -3$	$x > 3$



(3, ∞)

$$\begin{cases} 2x + 3 < 1 \\ -x + 6 < 3 \end{cases}$$

$2x + 3 < 1$	$2x + 3 < 1$	$x < -1$
$-x + 6 < 3$	$-x < -3$	$x > 3$

No tiene solución.

EJERCICIOS INECUACIONES

1.Resolver las siguientes inecuaciones

a) $2(x+1)-3(x-2)<x+6$

b) $\dfrac{3x+1}{7}-\dfrac{2-4x}{3}\geq\dfrac{-5x-4}{14}+\dfrac{7x}{6}$

c) $6\left(\dfrac{x+1}{8}-\dfrac{2x-3}{16}\right)>3\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{3}{8}(3x-2)$

2. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases}(x+1)\cdot 10+x\leq 6(2x+1)\\ 4(x-10)<-6(2-x)-6x\end{cases}$$

3. Resolver las inecuaciones:

a) $7x^2+21x-28<0$

b) $-x^2+4x-7<0$

c) $4x^2-16\geq 0$

4. Resuelve:

a) $x^4+12x^3-64x^2>0$

b) $2x^4-25x^2+144<0$

c) $3x^4-16x^2-225\geq 0$

d) $4x^2-4x+1\leq 0$

5. Halla los valores de k para los que las raíces de la ecuación $x^2-6x+k=0$ sean las dos reales y distintas.

6 Resolver los sistemas:

a) $\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$