Bloque 1. Aritmética y Álgebra

11. Ecuaciones

1. Ecuaciones polinómicas de primer grado con una incógnita

Al comparar dos expresiones algebraicas mediante el signo matemático “igual” (=), creamos una **igualdad**. Esta igualdad puede observar tres tipos de soluciones:

1ª.- Que tenga infinitas soluciones y se denomina **identidad**.

Ejemplo.- $3b = b + b + b$

Podemos dar cualquier valor a “b” y siempre se cumplirá la igualdad.

2ª.- Que tenga una sola solución y se denomina **ecuación**.

Ejemplo.- $x = 3 + 1$

Solamente dando el valor 4 a “x” se cumplirá la igualdad. (Puede haber casos en los que la ecuación no tenga solución y dará igualdades del tipo $3 = 7$ o $1 = 2$).

Elementos de una ecuación

En toda ecuación se identifican unos elementos que la conforman:

Términos: Son cada uno de los monomios que forman la ecuación.

Miembros: Son los polinomios que se encuentran a ambos lados del signo igual. El primer miembro a la izquierda del signo y el segundo a la derecha.

Incógnita: Es la parte literal (habitualmente x) que es objeto del cálculo.

Primer miembro   Segundo miembro

$$5 + x \quad = \quad 3x - 1$$

Los términos son cuatro: 5, x, 3x y .-1

Las ecuaciones se clasifican según el monomio de mayor grado de entre todos los términos de la ecuación, como se detalla en los siguientes ejemplos:

Ecuaciones de primer grado: $2x - 1 = x + 2$

Ecuaciones de segundo grado: $2x + 3 = x^2 - 5$

Ecuaciones de tercer grado: $2x^3 + 3 = x^2 - 5$

Pasos para resolver una ecuación de primer grado

Paso 1. Eliminación de denominadores

Si existen varios denominadores se eliminarán, aplicando el procedimiento del mínimo común múltiplo. Se halla el mínimo común múltiplo de todos los denominadores y éste se divide entre cada denominador antiguo, multiplicando el resultado por su respectivo numerador.

Ejemplo.-

$$x/2 + x/3 = 5$$

El m.c.m de los denominadores 2 y 3 es 6. Ponemos el mismo denominador en los dos miembros. Lo dividimos por cada denominador antiguo y el resultado lo multiplicamos por su respectivo numerador.

$$\frac{3x + 2x}{6} = \frac{6 \cdot 5}{6}$$

$$\frac{5x}{6} = \frac{30}{6}$$

A continuación eliminamos los denominares, lo que sería equivalente a multiplicar los dos miembros por el m.c.m. Nos queda:

$$5x = 30$$

Paso 2. Eliminación de paréntesis

Si existen paréntesis se operan para eliminarlos, teniendo buen cuidado de ir multiplicando los signos correspondientes. Para ello hay que tener en cuenta las reglas de los signos:

$$(+)\cdot(+) = (+)$$
$$(-)\cdot(-) = (+)$$
$$(+)\cdot(-) = (-)$$
$$(-)\cdot(+) = (-)$$

Ejemplo.-

$$3\cdot(x-2) - 2(x+1) = 3$$
$$3x - 6 - 2x - 2 = 3$$
$$x - 8 = 3$$

Paso 3. Transposición de términos

Se adopta el criterio de dejar en un miembro los términos que posean la incógnita (generalmente en el primer miembro, el de la izquierda) y se pasan al otro miembro los demás.

La transposición de términos se rige por las reglas:

Cualquier término que esté en un miembro sumando pasa al otro restando, y viceversa.

Cualquier término que esté en un miembro multiplicando pasa al otro dividiendo, y viceversa.

Paso 4. Reducción de términos semejantes

Se suman los términos de uno y otro miembro.

Paso 5. Despeje de la incógnita

Se deja la incógnita totalmente aislada y con signo positivo.

<u>Ejemplo</u>.-

$5x - 6x + 8 = 39 - 15x - 3$

Agrupo los términos con x en el primer miembro y los otros en el segundo:

$5x - 6x + 15x = 39 - 3 - 8$

Reduzco términos semejantes:

$14x = 28$

Como el 14 está multiplicando a x pasa al otro miembro dividiendo:

$x = 28 / 14 = 2$

Ejemplos de resolución de ecuaciones:

$a)\ 3x+5=x+1$

Agrupo las x en el primer miembro y los números en el segundo :

$3x-x=1-5$

Reduzco términos :

$2x=-4$

Despejo x :

$x=\frac{-4}{2}=-2$

$b)\ 3-x=-3(x+5)$

Primero elimino paréntesis, efectuando la operación :

$3-x=-3x-15$

Agrupo las x en el primer miembro y los números en el segundo :

$-x+3x=-15-3$

Reduzco términos :

$2x=-18$

Despejo x :

$\mathrm{x}=\frac{-18}{2}=-9$

$c)\ \frac{3x}{2}+7=\frac{4x}{3}+8$

Primero hallamos el m.c.m de los denominadores $\text{m.c.m}(2,3)=6$

Ponemos e el mismo denominador en ambos miembros :

$\frac{3\cdot 3x}{6}+\frac{6\cdot 7}{6}=\frac{2\cdot 4x}{6}+\frac{6\cdot 8}{6}$

Multiplicamos los dos miembros por el m.c.m, que en este caso es 6, y desaparecen los denomadores :

$9x+42=8x+48$

Agrupamos las x en el primer miembro :

$9x-8x=48-42$

Reducimos terminos :

$x=6$

$c)\ \frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}=6$

Qitamos denominadores, teniendo en cuenta que m.c.m (2,3) = 6

$$\frac{3\cdot(x-1)}{6}+\frac{2\cdot(x+2)}{6}=\frac{6\cdot 6}{6}$$

Eliminamos denominadores multiplicando los dos miembros por 6 :

$$3\cdot(x-1)+2\cdot(x+2)=6\cdot 6$$

Quitamos paréntesis :

$$3x-3+2x+4=36$$

$$3x+2x=36+3-4$$

$$5x=35$$

$$x=\frac{35}{5}=7$$

2. Ecuaciones polinómicas de segundo grado con una incógnita

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0.$$

Para **resolver ecuaciones de segundo grado** utilizamos la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Importante: es posible que para resolver la ecuación de segundo grado aplicando la fórmula, haya que operar previamente hasta dejar la ecuación del tipo **$ax^2 + bx + c = 0$.**

Ejemplo: $(x-2)^2 + 7(x-1)^2 = 4 - x$

$$x^2+4-4x + 7(x^2+1-2x) = 4 - x$$

$$x^2+4-4x + 7x^2+7-14x = 4 - x$$

$$x^2 + 7x^2 - 4x - 14x + x + 7 + 4 - 4 = 0$$

$$8x^2 - 17x + 7 = 0$$

Al aplicar la fórmula para la resolución, podemos tener varios casos:

Caso 1. b≠0, c≠0 y discriminante b^2-4ac > 0

En este caso, todos los coeficientes de los monomios son distintos de 0, y el resultado del radicando de la raíz es positivo. Al ser una raíz cuadrada, tendrá dos soluciones, una positiva y una negativa, por lo que la ecuación tendrá dos soluciones.

Ejemplos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Caso 2. b≠0, c≠0 y b^2-4ac = 0

En este caso, el resultado de la raíz cuadrada es 0, con lo que la solución es única, y corresponde con:

$$\boldsymbol{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}$$

Caso 3. b^2-4ac < 0 (El radicando es negativo independientemente del valor de b y c)

En este caso, como la raíz de un número negativo no existe, se considera que la ecuación **no tiene solución.**

Caso 4. b = 0

En este caso, la ecuación será de la forma **$ax^2 + c = 0$,** y si aplicamos en la fórmula b=0, nos dará que las soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a}$$

De esto se deduce que si -4ac es negativo, la ecuación no tendría solución, y si fuese positivo, tendría dos soluciones (una positiva y otra negativa).

Otra forma de calcularlo sería aplicando las reglas de transposición de términos de las ecuaciones de primer grado, y despejar finalmente **x** como la raíz cuadrada del segundo miembro:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -c / a$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Se verifica que ambos procesos dan la misma solución porque:

$$\frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \pm\sqrt{\frac{-4ac}{4aa}} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Ejemplo: **$4x^2 - 64 = 0$**

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{-(-64)}{4}} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Es decir, las soluciones serían $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$

Caso 5. c = 0

En este caso, la ecuación será de la forma **$ax^2 + bx = 0$,** y si aplicamos en la fórmula c=0, nos dará que las soluciones son:

$$\boldsymbol{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{b^2 - 4a0}}{2a} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}$$

Siempre van a tener dos soluciones, porque el radicando, al ser una potencia de exponente par 2, siempre será positivo. Además, una de ellas siempre será 0, porque la raíz cuadrada de b al cuadrado siempre tendrá como soluciones +b y –b, con lo que las soluciones serán:

$$\boldsymbol{x1} = \frac{-\mathbf{b} + \mathbf{b}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{x2} = \frac{-\mathbf{b} - \mathbf{b}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}} = \frac{-\mathbf{2b}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}} = \frac{-\mathbf{b}}{\boldsymbol{a}}$$

Otra forma de hacerlo es sacando la x como factor común:

$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x\,(ax + b) = 0$

Ahora nos da un producto de dos factores, que debe ser 0. Para que un producto de dos factores sea 0, al menos uno de los dos debe ser 0, por tanto las soluciones se sacan igualando los factores a 0.

Primera solución $x = 0$

Segunda solución $ax+b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -b/a$

Ejemplo:

$7x^2 + 21x = 0$

Las soluciones serán

$x_1 = 0$

$x_2 = -21/7$ **$= -3$**

3. Ecuaciones polinómicas bicuadradas

Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Para **resolver ecuaciones bicuadradas**, efectuamos el cambio de variable **x^2 = t, que al mismo tiempo supone que $x^4 = t^2$;** con lo que se genera una ecuación de segundo grado con la incógnita t:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Importante: Por cada valor positivo de t habrá dos valores de x, por lo que puede haber hasta 4 soluciones.

$$x = \pm\sqrt{t}$$

Ejemplo:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \dfrac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

$$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -3 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} \nearrow x_3 = 2 \\ \searrow x_4 = -2 \end{cases}$$

Este mismo procedimiento podemos utilizar para resolver ecuaciones cuyos monomios con x tengan grado par y sea el grado de uno el doble que el de otro.

ECUACIÓN	CAMBIO DE VARIABLE A APLICAR	NUEVA ECUACIÓN
$ax^6 + bx^3 + c = 0$	$x^6 = t^2$ y $x^3 = t$	$at^2 + bt + c = 0$
$ax^8 + bx^4 + c = 0$	$x^8 = t^2$ y $x^4 = t$	$at^2 + bt + c = 0$
$ax^{10} + bx^5 + c = 0$	$x^{10} = t^2$ y $x^5 = t$	$at^2 + bt + c = 0$
$ax^{2n} + bx^n + c = 0$	$x^{2n} = t^2$ y $x^n = t$	$at^2 + bt + c = 0$

Ejemplo:

$$x^6 - 7x^3 + 6 = 0$$

$$x^3 = t$$

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^3 = 6$ $\qquad x = \sqrt[3]{6}$

$x^3 = 1$ $\qquad x = \sqrt[3]{1}$ $\qquad x = 1$

4. Ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos

Son ecuaciones de cualquier grado escrita de la forma P(x) = 0. Para resolverlas, el polinomio P(x) se puede descomponer en factores **de primer y segundo grado**, entonces basta i**gualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones de primer grado y de segundo grado resultantes**.

<u>Ejemplo: $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$</u>

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x2 - x + 6$

Tomamos los divisores del término independiente 6: ±1, ±2, ±3.

Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1- 8 - 1 + 6 = 0$

Dividimos por Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ 1 & & 2 & 3 & -5 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

Por ser la división exacta, **D = d · c**

$(x -1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = 0$

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5x - 6 \neq 0$

$P(- 1) = 2 \cdot (- 1)^3 + 3 \cdot (- 1)^2 - 5 \cdot (- 1) - 6= -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$(x -1) \cdot (x +1) \cdot (2x^2 +x -6) = 0$

Por tanto, la solución la obtendremos igualando cada uno de los factores anteriores a 0, dándonos dos ecuaciones de primer grado y una de segundo grado.

a) $2x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

b) $x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = 1$
c) $x + 1 = 0 \rightarrow x_4 = -1$

Las soluciones son: x = 1, x = − 1, x = −2 y x = 3/2

5. Ecuaciones irracionales

Las ecuaciones irracionales, o ecuaciones con radicales, son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical.

$$\sqrt{2x-3} - x = -1$$

<u>Resolución de ecuaciones irracionales</u>

Paso 1. Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.

Paso 2. Se elevan al cuadrado los dos miembros.

Paso 3. Se resuelve la ecuación obtenida.

Paso 4. Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación.

Paso 5. Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten las dos primeras fases del proceso hasta eliminarlos todos.

Ejemplo:

$$\sqrt{2x-3}-x=-1$$

Paso 1. Aislamos el radical:

$$\sqrt{2x-3}=-1+x$$

Paso 2. Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(-1+x)^2$$

$$2x-3=1-2x+x^2$$

Paso 3. Resolvemos la ecuación:

$$x^2-4x+4=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Paso 4. Comprobamos:

$$\sqrt{2\cdot 2-3}-2=-1 \qquad 1-2=-1$$

La ecuación tiene por solución x = 2, pero 0 no sería solución porque no existe la raíz cuadrada de un número negativo, y el radicando 2x-3 quedaría como -3 al sustituir la x por 0.

Ejemplo: $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2 \rightarrow \sqrt{x}=2-\sqrt{x-4} \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(2-\sqrt{x-4}\right)^2 \rightarrow$

$$x=4-4\sqrt{x-4}+x-4 \rightarrow \quad 4\sqrt{x-4}=0 \qquad \sqrt{x-4}=0 \rightarrow$$

$$\left(\sqrt{x-4}\right)^2=0^2 \qquad x-4=0 \qquad x=4$$

Comprobamos $\sqrt{4}+\sqrt{4-4}=2 \qquad 2+0=2$

Por tanto la ecuación tiene por solución x = 4.

6. Ecuaciones exponenciales

Son aquellas en la que la incógnita aparece en el exponente.

Para resolver una ecuación exponencial vamos a tener en cuenta:

Suponemos que $a > 0$ $a \neq 1$

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Además, se usarán las propiedades de las potencias.

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = (a : b)^n$

Ejemplos de resolución de ecuaciones exponenciales:

a) $2^{2x-1} = 4$

$2^{2x-1} = 2^2$ $\quad 2x - 1 = 2$ $\quad x = \frac{3}{2}$

b) $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$

$3^{\frac{x-3}{2x-1}} = 3^{\frac{3}{2}}$ $\quad \frac{x-3}{2x-1} = \frac{3}{2}$ $\quad x = -\frac{3}{4}$

c) $2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}=28$

$2^{x}\cdot 2+2^{x}+\frac{2^{x}}{2}=28$ $\quad$ $2^{x}\left(2+1+\frac{1}{2}\right)=28$

$2^{x}\cdot\frac{7}{2}=28$ $\quad$ $2^{x}=2^{3}$ $\quad$ $x=3$

En algunos casos, puede que tengamos que hacer un cambio de variable…

d) $2^{2x+1}-3\cdot 2^{x}+1=0$

$2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^{x}+1=0$

$2^{x}=t$ $\quad$ $2^{2x}=\left(2^{x}\right)^{2}=t^{2}$

$2t^{2}-3t+1=0$ $\quad$ $\begin{cases} t_1=\frac{1}{2} \\ t_2=1 \end{cases}$ $\quad$ $2^{x}=\frac{1}{2}$ $\quad$ $x_1=-1$

$2^{x}=1$ $\quad$ $x_2=0$

e) $2-3^{-x}+3^{x+1}=0$

$2-\frac{1}{3^{x}}+3\cdot 3^{x}=0$

$3^{x}=t$

$2-\frac{1}{t}+3\cdot t=0$

$3t^{2}+2t-1=0$

$t_1=-1$ $\quad$ $3^{x}=-1$ $\quad$ sin solución

$t_2=\frac{1}{3}$ $\quad$ $3^{x}=\frac{1}{3}$ $\quad$ $x=-1$

Si no sabemos despejar los exponentes, tendremos que aplicar logaritmos a ambos términos. En este caso, para despejar una incógnita que está en el exponente de una potencia, se toman logaritmos cuya base es la base de la potencia.

$$a^x = b$$

$$\log_a a^x = \log_a b \qquad x\log_a a = \log_a b \qquad x = \log_a b$$

Ejemplos:

a) $10^{x+2} = 5$

$$\log 10^{x+2} = \log 5$$

$$(x+2)\log 10 = \log 5$$

$$(x+2) = \log 5$$

$$x = \log 5 - 2 = -1.3010$$

b) $4^{3x} = 8^x + 3$

$$\left(2^2\right)^{3x} = 2^{3x} + 3$$

$$2^{3x} = t$$

$$t^2 - t - 3 = 0 \qquad t = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$2^{3x} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$3x\log 2 = \log\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{\log\frac{1+\sqrt{13}}{2}}{3\log 2} = 0.441$$

$$2^{3x} = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \qquad \text{No tiene solución}$$

7. Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Para resolver ecuaciones logarítmicas vamos a tener en cuenta:

a) **Las propiedades de los logaritmos.**

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^n = n$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_a \left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log_a x$$

b) $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

c) $x = \log_a b \quad \Rightarrow \quad a^x = b$

Además tenemos que comprobar las soluciones para verificar que no tenemos logaritmos nulos o negativos.

Ejemplos:

1)

$$\log 2 + \log\left(11 - x^2\right) = 2\log(5 - x)$$

$$\log\left[2\left(11 - x^2\right)\right] = \log(5 - x)^2$$

$$2\left(11 - x^2\right) = (5 - x)^2$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$x = 3 \qquad 11 - 3^2 > 0 \qquad 5 - 3 > 0$

$x = \frac{1}{3} \qquad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \qquad 5 - \frac{1}{3} > 0$

2)

$$2\log x = 3 + \log\frac{x}{10}$$

$$2\log x = 3 + \log x - \log 10$$

$\log x = 3 - 1 \qquad \log x = 2 \qquad x = 100$

3)

$$\log x + \log(x + 3) = 2\log(x + 1)$$

$$\log\left[x(x + 3)\right] = \log(x + 1)^2$$

$$x(x + 3) = (x + 1)^2$$

$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \qquad x = 1$

4)

$$\frac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)}=2$$

$$\log\left(16-x^2\right)=2\log(3x-4)$$

$$\log\left(16-x^2\right)=\log(3x-4)^2 \qquad \left(16-x^2\right)=(3x-4)^2$$

$$10x^2-24x=0 \qquad x=0 \qquad x=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$$

Ejercicios –

1. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

   a) $5x + 3 - 2x = 4x^2 - 3x + 8$

   b) $(x + 5)^2 - 3 = 2x + 6$

   c) $3x - 2x + 4 = 3 + 4x$

   d) $(x + 2)(x - 2) = 3x - 1$

   e) $4 + 5x - 2x = 6 + 4 - x$

   f) $(3/2)\,x + 5 = (4/3) - 7x$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \frac{3}{2} - 5x = 4$$

$$b)\ \frac{x}{5} - \frac{x}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c)\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3x}{2}$$

$$d)\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{11}{6}$$

$$e)\ \frac{x-7}{4} + \frac{x-1}{3} = x - 5$$

$$f)\ \frac{x-1}{5} - \frac{1-x}{6} = \frac{x-1}{4}$$

$$g)\ 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2} = \frac{7}{6}$$

$$h)\ \frac{4 \cdot (x+5)}{4} + 1 = 3x - \frac{x+1}{2}$$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x - 7 = 1$

b) $7x = -63$

c) $x - 12 = 26$

d) $2x - 3 = 11$

e) $x + 8 = 12$

f) $15x = 60$

g) $7x = 49$

h) $x + 15 = 48$

i) $3 \cdot (6 + x) = 2 \cdot (x - 6)$

j) $9 \cdot (x + 1) = 6 \cdot (x + 3)$

k) $12 - (x - 3) = 6$

l) $16 \cdot (x - 2) = 24 \cdot (x - 3)$

m) $3 \cdot (x + 1) - 5 = 2x + 1$

n) $2 \cdot (x - 7) = -4 \cdot (x - 1)$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\frac{3x}{2} = \frac{x+1}{3} + 4$$

$$7(13 - 2x) = x + 4(12 + 3x)$$

$$5(2x + 3) = 4(2 - 3x) + 2(2 + 3x)$$

$$\frac{3x - 5}{2} = \frac{3(3x - 1)}{5}$$

5. El patio de mi colegio mide 25 metros más de largo que de ancho. Si su perímetro es 270 metros, ¿cuál es su longitud y su anchura?

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

COMPLETAS	INCOMPLETAS
a) $x^2 + 7x + 12 = 0$	a) $-x^2 + 4 = 0$
b) $x^2 - 7x - 18 = 0$	b) $-2x^2 - 5x = 0$
c) $x^2 + 2x - 15 = 0$	c) $-2x^2 = 0$
d) $2x^2 + 11x + 5 = 0$	

7. Resuelve:

a. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Solución: x1 = ___________, x2 = ___________.

b. $3x^2 - 14x + 8 = 0$

Solución: x1 = ___________, x2 = ___________.

c. $5x^2 - 11x + 2 = 0$

Solución: x1 = ___________, x2 = ___________.

d. $x^2 - 10x + 24 = 0$

Solución: x1 = ___________, x2 =___________.

e. $9x^2 - 36 = 0$

Solución: x1 = ___________, x2 = ___________.

f. $49x^2 - 196 = 0$

Solución: x1 = ___________, x2 = ___________.

g. $35x^2 + 9x - 2 = 0$

Solución: x1 =________, x2 =___________.

h. $x^2 - 2x - 8 = 0$

Solución: x1 = ________, x2 =___________.

i. $4x^2 + 11x - 3 = 0$

Solución: x1 = ________, x2 = ___________.

j. $4x^2 - 13x + 3 = 0$

Solución: x1 = ________, x2 = ___________.

k. $2x^2 - 11x + 5 = 0$

Solución: x1 = ________, x2 = ___________.

l. $x^2 - 13x + 42 = 0$

Solución: x1 = ________, x2 = ___________.

8. Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

9. Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

10. La base de un rectángulo es doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

11. En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

12. Se han consumido 7/8 de un bidón de aceite. Reponemos 38 l y el bidón ha quedado lleno hasta sus 3/5 partes. Calcula la capacidad del bidón.

13. Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

14. Luís hizo un viaje en el coche, en el cual consumió 20 l de gasolina. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió 2/3 de la gasolina que tenía el depósito y en la segunda etapa, la mitad de la gasolina que le queda. Se pide:

A) Litros de gasolina que tenía en el depósito.

B) Litros consumidos en cada etapa.

15. En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 €. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

16. La dos cifras de un número son consecutivas. La mayor es la de las decenas y la menor la de las unidades. El número es igual a seis veces la suma de las cifras. ¿Cuál es el número?

17. Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad de la padre era doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

18. Trabajando juntos, dos obreros tardan en hacer un trabajo 14 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?

19. Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.

20. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

21. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

22. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2.

23. En una pirámide de base cuadrangular, la altura es 4 cm y el lado de la base es 6 cm. ¿Cuál será su apotema, calculándolo según el teorema de Pitágoras? ¿Cuánto medirá su arista?

24. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m².

25. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m respectivamente.

26. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) **$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ (Soluciones 3 y -3)**
b) **$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (Soluciones 2, -2, 1 y -1)**

27. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x - \sqrt{x} = 2 \Rightarrow$ Sol: $x = 4$

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1 \Rightarrow$ Sol: $x = 4$

c) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17 \Rightarrow$ Sol: no tiene

d) $x + \sqrt{5x + 10} = 8 \Rightarrow$ Sol: $x = 3$

28. Resolver las ecuaciones exponenciales:

a) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

b) $\sqrt[3]{8^x} = 65536$

c) $4^{x^2-6x} = 16384$

d) $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$

e) $3^{x^2-1} = 134$

f) $2^{2x} \cdot 2 = 3^x \cdot 3^5$

g) $3^x \cdot 5^{2x} = 150$

h) $3^{1-x} - 3^x = 2$

i) $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$

j) $e^{x} - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$

k) $4^{x-1} + 2^{x+2} = 48$

29. Resolver las ecuaciones logarítmicas:

a) $4\log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2\log x$

b) $2\log x - 2\log(x+1) = 0$

c) $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$

d) $\log\left(25 - x^3\right) - 3\log(4 - x) = 0$

e) $\frac{\log\left(35 - x^3\right)}{\log(5 - x)} = 3$

f) $\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$

Ejercicios de ecuaciones de las pruebas de acceso

30. **Si sumamos uno a un número y calculamos su raíz cuadrada positiva, se obtiene lo mismo que si sumamos uno a la raíz cuadrada positiva del doble del número. ¿De qué número se trata?** *[Solución: 0]*

Problemas de ecuaciones

1. La suma de dos números pares consecutivos es 102. Halla esos números. (50 y 52)
2. La suma de tres números impares consecutivos es 69. Busca los números. (21,23 y25)
3. La suma de dos números pares consecutivos es 210. Halla esos números. (104 y 106)
4. La suma de dos números es 32 y uno de ellos es la séptima parte del otro. Halla los dos números. (4 y 28)
5. La suma de dos números consecutivos es 107. Calcula esos números. (53 y 54)
6. La suma de dos números pares consecutivos es 54. Busca esos números. (26 y 28)
7. La suma de dos números impares consecutivos es 36. Busca esos números. (17 y 19)
8. Halla dos números sabiendo que uno es triple que el otro y su suma es 20. (5 y 15)
9. Halla dos números sabiendo que uno excede al otro en 6 unidades y su suma es 40 .(17y23)
10. Si dos números son tales que uno es el cuádruplo del otro y su suma es 125.¿Cuáles son esos números? (25 y100)
11. Se reparten bombones entre tres niños. Al 2º le dan el doble que al primero y al tercero el triple que al segundo. Si el total es de 18 bombones. ¿Cuántos bombones dan a cada niño? (al 1º 2 bombones, al 2º 4 bombones y al 3º 12 bombones)
12. En un salón hay doble número de niñas que de niños y la mitad de adultos que de niños. Si en total hay 35 personas ¿Cuántos niños, niñas y adultos hay? (niños 10,niñas 20,adultos 5)
13. En una reunión hay 4 veces más niños que mujeres y de hombres 3 veces más que la mitad de mujeres. Si en total hay 91 personas ¿Cuántos niños, mujeres y hombres hay? (Niños 56, mujeres 14 y hombres 21)
14. En un avión viajan el cuádruple de hombres que de mujeres y la mitad de niños que de mujeres, en total viajan 165 personas .¿Qué número corresponde a cada tipo de persona? (Hombres 120, mujeres 30 y niños 15)
15. Un hombre legó su fortuna de la siguiente manera: la mitad para su esposa, la tercera parte para su hijo, la octava parte para su sobrina y 180 € a una institución benéfica ¿Cuánto dinero poseía? (4320 €)
16. En una clase hay niños de 13, 14 y 15 años. De 14 años hay el doble que de 15 años y de 13 años el triple que de 14. ¿Cuántos niños hay de cada edad si en total hay 27 alumnos? (de13 años 18 niños, de 14 años 6 y de 15 años 3 niños)
17. En un autobús viajan triple número de mujeres que de niños y doble número de hombres que de mujeres y niños juntos. En total viaja 60 personas. Calcula cuántos niños mujeres y hombres viajan en dicho autobús. (niños 5, mujeres 15 y hombres 40)
18. Luis tiene 16 años más que Manuel y dentro de 4 años tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada uno? (Manuel 12 y Luis 28)
19. La hermana de Juan tiene 13 años más que él y dentro de 6 años tendrá el doble ¿Qué edad tiene cada uno? (Juan 7 años, hermana 20)
20. Un padre tiene 25 años más que su hijo y dentro de 5 años tendrá el doble ¿Qué edad tiene cada uno? (hijo 20 años, padre 45)
21. Ana tiene 7 años más que Pedro y hace 1 año tenía el doble ¿Qué edad tiene cada uno? (Pedro 8 años y Ana 15)
22. María tiene 30 años más que Luis y dentro de 7 años tendrá el triple. ¿Qué edad tiene cada uno? (María 38 años y Luis 8)
23. Ana tiene 36 años menos que su padre y dentro de 8 años, su padre tendrá el cuádruplo de los que entonces tenga ella.¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad? (Ana 4 años y padre 40)
24. La madre de Luis tiene 26 años más que él y dentro de 3 años tendrá el triple. ¿Qué edad tiene cada uno? (Luis 10 años, madre 36)
25. Marisa tiene 20 años más que su hijo y dentro de 5 años tendrá el doble de edad que la que entonces tenga éste. ¿Qué edad tiene cada uno? (Marisa 35 años, hijo 15)

26. La diferencia de edad entre dos hermanos es de es de 5 años y dentro de 2 años uno tendrá doble que el otro.¿Qué edad tiene cada uno? (un hermano 3 años y otro 8)
27. La diferencia de edad entre un padre y un hijo es de 32 años y dentro de 5 años la edad del padre será el triple de la que entonces tenga el hijo.¿Qué edad tiene cada uno ? (Hijo 11 años, padre 43)
28. La diferencia de edad entre un abuelo y su nieto es de 48 años y hace 4 años el abuelo tenía 5 veces la edad del nieto.¿Qué edad tiene cada uno? (nieto 16 años, abuelo 64)
29. El perímetro de un rectángulo mide 34 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que la base mide 7 m más que la altura. (base 12 m y altura 5 m)

Problemas de ecuaciones de segundo grado

30. La diferencia entre la base y la altura de un rectángulo es 4 m. Halla las dimensiones sabiendo que el área es 60 m^2 (base 10 m y altura 6cm)
31. La diferencia entre la base y la altura de un rectángulo es de 2 m..sabiendo que el área es 48 m^2, halla la base y la altura del rectángulo. (base 8 cm y altura 6 cm)
32. La diferencia entre la base y la altura de un triángulo es de 2 m. Y el área es 24 m^2 ·Halla la base y la altura del triángulo· (base 4 cm y altura 6cm)
33. El área de un cuadrado es 144 m^2 .Calcula su lado (lado 12 cm)
34. El producto de dos números consecutivos es 1260. Calcula dichos números. (35 y 36)
35. El producto de dos números es 675. calcula dichos números sabiendo que uno es el triple del otro. (15 y 45)
36. El producto de dos números es 450, sabiendo que uno excede al otro 7 unidades, Calcula dichos números. (18 y 25)
37. El producto de dos números pares consecutivos es 624. Busca esos números. (24 y 26)
38. Un número es 5 veces superior a otro y su producto es 320. Busca los dos números (8 y 40)

Modelos de problemas

La suma de dos números pares consecutivos es 102 . Halla esos números

DATOS	PLANTEAMIENTO
1^{er} número = x 2º número = x + 2 Suma = 102	x + x +2 = 102 2x = 100 $x = \frac{100}{2} = 50$ 50 + 2 = 52 R; 1er número = 50 2º número = 52 Comprobación 102