Bloque 1. Aritmética y Álgebra

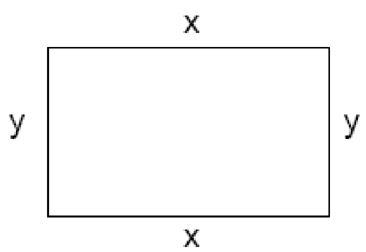
10. Polinomios

1. Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones para reflejar de forma generalizada la relación que existe entre varias magnitudes y poder realizar un cálculo de esa relación en función de los valores que tomen las diferentes magnitudes.

Perímetro: **2x + 2y** ;

Área: **x . y**



Ambas son **expresiones algebraicas** (recuérdese que el signo de la multiplicación acostumbra a no ponerse).

Otras expresiones algebraicas podrían ser:

Suma de cuadrados: $\mathbf{a^2 + b^2}$

Triple de un número menos doble de otro: **3x - 2y**

Suma de varias potencias de un número: $\mathbf{a^4 + a^3 + a^2 + a}$

2. Valor numérico de una expresión algebraica

Si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por número y se realiza la operación indicada se obtiene un número que es el "**valor numérico**" de la expresión algebraica para los valores de las letras dados.

En el ejemplo anterior, si el largo del terreno fueran 50 m (**x = 50)** y el ancho 30 m (**y = 30**), el valor numérico sería:

Perímetro = **2 · 50 + 2 · 30** = 100 + 60 = 160 m

Área = **50 · 30** = 1500 m^2

3. Monomios

Si se observan las siguientes expresiones algebraicas se verá que en ellas aparecen distintas operaciones:

Ejemplo.- 1) $3ax$; 2) $-2xy^2$; 3) $8ab^3x$

En estas expresiones no aparecen sumas entre términos, siendo por ello denominadas **monomios**. Podemos por tanto decir que:

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Se llama **coeficiente** de un monomio al número que aparece multiplicando a las letras. Normalmente se coloca al principio. **Si es un 1 no se escribe** y **nunca es 0** ya que la expresión completa sería 0. En los tres ejemplos de monomios anteriores los coeficientes son 3 ; -2 ; y 8 respectivamente.

Se llama literal de un **monomio** a las letras, con sus correspondientes exponentes y se denomina **grado** de un monomio a la suma de los exponentes de las letras. De este modo los tres monomios anteriores serán: el 1) de grado 2, el 2) de grado 3, el 3) de grado 5 (como es sabido cuando el exponente es 1 no se escribe).

En la mayor parte de los casos los monomios que se utilizarán serán más simples ya que sólo estarán formados por una letra, normalmente la x, el exponente correspondiente que será el grado del monomio y un coeficiente.

Por ejemplo: $-2x^2$; $3x$; $-5x^3$; x^5 son cuatro monomios de grados 2, 1, 3 y 5 respectivamente.

Además, los coeficientes de un monomio pueden no ser enteros

Ejemplos:

Monomio	***Coeficiente***	***Literal***	***Grado***
$3axy^2$	3	axy^2	4
$-5z^3$	-5	$-5z^3$	3
$-4x$	-4	x	1
x^3y^3	1	x^3y^3	6

4. Monomios semejantes

Son **monomios semejantes** entre sí aquellos que tienen la misma parte literal con los mismos exponentes, por lo que sólo se pueden diferenciar en el coeficiente y tendrán el mismo grado.

Ejemplo.- Son monomios semejantes: $\mathbf{2ax^4y^3}$; $\mathbf{-3ax^4y^3}$; $\mathbf{ax^4y^3}$; $\mathbf{5ax^4y^3}$

Mientras que por ejemplo no son semejantes a los anteriores: $\mathbf{axy^3}$; $\mathbf{3a^2x^4y^3}$; $\mathbf{2bx^4}$

5. Suma y resta de monomios

Observar las siguientes operaciones:

1) $5ax^4y^3 - 2ax^4y^3 = 3ax^4y^3$

2) $4ax^4y^3 + x^2y$

En el primer caso la resta de monomios se puede realizar mientras que en el segundo caso la suma no; esto se debe a que en el primer caso se trata de monomios semejantes y en el segundo no. Por tanto:

Para sumar o restar dos monomios tienen que ser semejantes. La suma o resta es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o diferencia, según el caso, de los coeficientes.

Cuando los monomios no son semejantes la suma queda indicada y el resultado es un **polinomio** como veremos más adelante.

Ejemplo.- Observa las siguientes operaciones con monomios:

a) $2ax^4 - 3ax^4 + 5ax^4 = 7ax^4 - 3ax^4 = 4\ ax^4$

b) $2x^3 - x + x^3 + 3x^3 + 2x = 6x^3 + x$

Como puedes observar, se suman o restan los coeficientes de los monomios que son semejantes. Si no lo son no pueden sumarse, se deja la operación indicada.

6. Producto de monomios

Para **multiplicar monomios**, se multiplican los coeficientes de cada uno entre si y las potencias que tengan la mima base de cada uno, dejando las de distinta base como estén.

<u>Ejemplo</u>.- Calcular el producto de los siguientes monomios: $\mathbf{4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3}$.

Se procede de la siguiente forma:

- Se multiplican los **coeficientes**: 4, 1 y 3 respectivamente. Resultado: **12**
- Se multiplican todas las **potencias de base a (sumando los exponentes)**. Resultado: $\mathbf{a^2}$
- Se multiplican todas las **potencias de base b**. Resultado: $\mathbf{b^2}$
- Se multiplican todas las **potencias de base x**. Resultado: $\mathbf{x^6}$
- Se multiplican todas las **potencias de base y**. Resultado: $\mathbf{y^7}$
- Resultado final: $\mathbf{4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3} = \mathbf{12a^2b^2x^6y^7}$

7. División de monomios

Para **dividir monomios**, se dividen los coeficientes de cada uno entre si (se puede dejar indicado en forma de fracción) y las potencias que tengan la mima base de cada uno, dejando las de distinta base como estén.

<u>Ejemplo</u>.- Calcular la división de los siguientes monomios: $\mathbf{4ax^4y^3 : 2\,x^2y}$

Se procede de la siguiente forma:

- Se dividen los **coeficientes**: 4 entre 2. Resultado: **2**
- Se dividen todas las **potencias de base a (restando los exponentes)**. Resultado: **a**
- Se dividen todas las **potencias de base x**. Resultado: $\mathbf{x^2}$
- Se dividen todas las **potencias de base y**. Resultado: $\mathbf{y^2}$
- Resultado final: $\mathbf{4ax^4y^3 : 2x^2y} = \mathbf{2ax^2y^2}$

8. Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica que se obtiene al expresar cualquier suma de monomios no semejantes.

Si recordamos la suma/resta de monomios, cuando estos no eran semejantes, no se podían sumar/restar. En este caso lo que se obtiene es por tanto un polinomio.

Ejemplo.- Son polinomios las expresiones siguientes:

a) $\mathbf{4ax^4y^3} + \mathbf{x^2y} + \mathbf{3ab^2y^3}$

b) $\mathbf{4x^4} \ \mathbf{-2x^3} + \mathbf{3x^2} \ \mathbf{- 2x + 5}$

En el primer caso el polinomio consta de la suma de tres monomios, cada uno de ellos es un **término** del polinomio, luego tiene tres términos., cada uno con varias letras, mientras que en el segundo caso el polinomio tiene 5 términos. Si un término sólo consta de un número se le llama **término independiente** (5 en el caso b y no existe en el caso a)

Cuando un polinomio consta de dos monomios se denomina **binomio**:

$\mathbf{x^2y} + \mathbf{3ab^2y^3}$; $\mathbf{2x + 3}$ son dos binomios

Cuando consta de tres monomios se denomina **trinomio**:

el **caso a)** anterior o $\mathbf{-2x^3} + \mathbf{3x^2} \ \mathbf{+ 5}$ son dos trinomios.

Con más de tres términos (monomios) ya se denomina en general polinomio.

Respecto al **grado** de un polinomio, se dice que tiene por grado el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Así en el **caso a)** los grados de los monomios (suma de los exponentes de las letras) son 8, 3 y 6, luego el **grado del polinomio es 8**. En el **caso b) el grado es 4**.

Los números que acompañan como factores a las letras (coeficientes de los monomios), se llaman también **coeficientes** del polinomio: 4 , -2 , 3 , -2 , y 5 respectivamente en el caso b).

Lo más habitual que nos vamos a encontrar son polinomios del tipo del caso b), por tanto con una sola letra, que habitualmente será la x. En este caso a la letra se le suele llamar **variable.**

9. Polinomio Completo y Polinomio ordenado

Un polinomio se llama **polinomio completo** cuando contiene todos los exponentes de la variable, desde el mayor hasta 0, y se dice que es un **polinomio ordenado** cuando sus términos aparecen escritos de forma ordenada.

Ejemplos:

$4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ **es un polinomio completo y ordenado**

$4x^4 - 2x + 5$ **no es un polinomio completo**

10. Suma y resta de polinomios

La suma de polinomios se basa en la de monomios ya vista en este tema. Se podrán sumar los términos (monomios) que sean semejantes de los polinomios objeto de la suma.

Ejemplo.- Para calcular la suma de los polinomios:

$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (5x^3 - x^2 + 2x)$

Basta **sumar** los términos de grados 3, 2 y 1 de ambos polinomios y dejar el resto de los términos del primero como está.

Podemos indicar la suma de la siguiente forma para verla mejor:

$$
\begin{array}{l}
4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\
\underline{+ \quad -5x^3 \;\; -x^2 \;\; +2x \quad} \\
4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5
\end{array}
$$

Si en lugar de sumar dos polinomios se tratara de restarlos, bastaría cambiar el signo a todos los términos del segundo y sumar los resultados.

Ejemplo.- Para calcular la diferencia o resta de los dos polinomios anteriores:

$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) - (5x^3 - x^2 + 2x)$

Se calcula la suma:

$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (-5x^3 + x^2 - 2x) = 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5$

Observa que hemos cambiado el signo a todos los términos del polinomio sustraendo.

11. Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se deben multiplicar todos los monomios de unos por todos los del otro y sumar los resultados. ("Atención especial al producto de potencias de la misma base").

En el caso en que ambos polinomios consten de varios términos, se puede indicar la multiplicación de forma semejante a como se hace con número de varias cifras, cuidando de situar debajo de cada monomio los que sean semejantes.

Ejemplo.-

$$\begin{array}{rrrrr} & 2x^3 & -3x^2 & & +1 \\ & & & 2x & -3 \\ \hline & -6x^3 & +9x^2 & & -3 \\ 4x^4 & -6x^3 & & +2x & \\ \hline 4x^4 & -12x^3 & +9x^2 & +2x & -3 \end{array}$$

En la práctica no suele indicarse la multiplicación como en esta imagen, sino que suelen colocarse todos los términos seguidos y sumar después los que sean semejantes. Así:

<u>Ejemplo</u>.- $(-2x^3 + 3x^2 - 2x + 5)(x + 1) = (-2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) =$

$- 2x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 5$

15. Igualdades notables

Se denominan así a algunas operaciones con polinomios de especial interés ya que aparecerán frecuentemente en los cálculos. Las más usuales son:

<u>***a) Cuadrado de un binomio****: suma* ***(a + b)²*** *o diferencia* ***(a - b)²***</u>

Naturalmente realizar un cuadrado es multiplicar el binomio por sí mismo, luego:

$\mathbf{(a + b)^2} = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

"El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo "

De modo similar: $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ **(igual que antes pero cambiando el signo central).**

"En cualquier caso se debe tener en cuenta que el primer término "a" también puede ser negativo y por tanto cambiar el signo central". "En general se puede considerar siempre como una suma y para cada término asignarle el signo que le preceda (ver ejemplo)"

Ejemplo.-

a) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $(- x + 3)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

b) Suma por diferencia

Se refiere al producto de la suma de dos monomios por la diferencia de ellos mismos:

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b)} = a^2 - ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$$

Siempre recordamos que " **suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados"**.

¿Por qué son útiles los productos notables? Si tenemos que hacer el cuadrado de un binomio de números podemos actuar de dos formas:

- $(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$
- $(3 + 5)^2 = (3 + 5).(3+5) = 3.3 + 3.5 + 5.3 + 5.5 = 9 + 30 + 25 = 64$

Como vemos en el ejemplo, es más fácil sumar y luego elevar al cuadrado que utilizar el desarrollo del producto notable, pero ¿Qué ocurre si en vez de tener un binomio formado por dos números, uno de ellos es una letra? Entonces no podemos sumar y elevar, quedando únicamente la segunda opción:

- $(x + 5)^2 = (x + 5).(x + 5) = x^2 + 2.5.x + 5.5 = x^2 + 10.x + 25$

16. División de polinomios

La división de polinomios, en general se realiza de forma semejante a la de números de varias cifras, aunque las operaciones que realizamos rápidamente con los números, con los polinomios las vamos indicando. Veamos el proceso para dividir dos polinomios con un ejemplo: $\left(2x^3+3x-2\right):\left(x-3\right)$

- Buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado $2x^3$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad +3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

- Multiplicamos x-3 por el monomio $2x^2$, y restamos el resultado:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad + \quad 3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-1} \quad 6x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado $6x^2$, y multiplicamos x-3 por ese monomio, restando de nuevo el resultado:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + \quad\quad 3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2+6x \\ \cline{1-1} \quad\quad 6x^2+3x-2 & \\ \quad -6x^2 \;\; 18x & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 21x-2 & \end{array}$$

- Por último, buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado 21x, y repetimos el proceso:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad\quad +3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2+6x+21 \\ \cline{1-1} \quad\quad 6x^2+3x-2 & \\ \quad -6x^2+18x & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 21x-2 & \\ \quad\quad -21x+63 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad 61 & \end{array}$$

- El resultado es: cociente = $2x^2+6x+21$ y resto = **61**

17. Regla de Ruffini

Paolo **Ruffini** (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableción un método más breve para hacer la **división de polinomios**, cuando el **divisor es un binomio de la forma x — a**.

Para explicar los pasos a aplicar en la **regla de Ruffini** vamos a tomar de ejemplo la división:

$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

Paso 1: Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.

Paso 2: Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.

Paso 3: Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independendiente del divisor.

Paso 4: Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

	1	0	-3	0	2
3					
	1				

Paso 5: Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1				

Paso 6: Sumamos los dos coeficientes.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1	3			

Paso 7: Repetimos el proceso anterior cuantas veces sea necesario

	1	0	-3	0	2
3		3	9		
	1	3	6		

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	
	1	3	6	18	

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

Paso 8: El último número obtenido, 56 , es el resto.

Paso 9: El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$x^3 + 3x^2 + 6x + 18$

Ejemplo -

Dividir por la regla de Ruffini:

$(x^5 - 32) : (x - 2)$

	1	0	0	0	0	- 32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

$R = 0$

18. Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma (x − a) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x = a.

Ejemplo: Calcular por el teorema del resto el resto de la división:

P(x) : Q(x)

Siendo P(x)= $x^4 - 3x^2 + 2$ Q(x) = x − 3

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

Comprobamos según el teorema del resto que

P(3) = $3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 =$ **56**

19. Descomposición factorial de un polinomio

Para descomponer un polinomio extrayendo factores, podemos utilizar distintos métodos que vamos a ver a continuación:

Método 1: Sacar factor común

Consiste en aplicar la propiedad distributiva.

$$\mathbf{a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a\,(b + c + d)}$$

De esta forma sacamos fuera del polinomio, multiplicando, todo aquello que esté repetido en todos sus términos.

Ejemplos:

$$x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)$$

$$2x^4 + 4x^2 = 2x^2\,(x^2 + 2)$$

Método 2: Aplicar las igualdades notables

- **Aplicación de la diferencia de cuadrados (suma por diferencia)**

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Ejemplos:

$$x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$$

- **Aplicación de un binomio cuadrado perfecto (binomio al cuadrado)**

$$a^2 \pm 2\,a\,b + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplos:

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$3^2 \quad 2 \cdot 3 \cdot x \quad x^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$x^2 \quad 2 \cdot x \cdot 2 \quad 2^2$$

Método 3: Trinomio de segundo grado

Para **descomponer en factores el trinomio de segundo grado** $P(x) = ax^2 + bx + c$, **se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado**. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2, el polinomio descompuesto será:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Ejemplo:

$$x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Ejemplo:

$x^2 - x - 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Para descomponer en factores los trinomios de cuarto grado de exponentes pares y hallar sus raíces hay que hacer un cambio de variable.

Ejemplo: ***$x^4 - 10x^2 + 9$***

Hacemos un cambio de variable $x^2 = t$, de forma que el trinomio $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ se transforma en $t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 9 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x^2 = 1 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$\mathbf{x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)}$$

Otro ejemplo:

$x^4 - 2x^2 - 3$

$x^2 = t$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$x^2 = 3 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{3}$$

$$x^2 = -1 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$$

$$x^4 - 2x^2 + 3 = (x2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$$

<u>Método 4. Búsqueda de divisores y Regla de Ruffini</u>

Cuando no es posible extraer factor común ni usar las identidades notables, es necesario encontrar divisores del polonomio. Para ello, utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini para encontrar las raíces enteras.

Descomposición de un polinomio de grado superior a dos y cálculo de sus raíces

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$$

1) **Tomamos los divisores positivos y negativos del término independiente:** ±1, ±2, ±3.

2) Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta. Probamos con los divisores hasta que en uno nos de el valor 0 como resultado.

$$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$$

3) **Dividimos por Ruffini**.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

4) **Por ser la división exacta**, **D = d · c** .

$$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = (x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$$

5) Continuamos el proceso anterior, pero ahora con el polinomio resultante de grado menor. Seguimos probando con los divisores anteriores.

Volvemos a probar por 1, después por -1, etc hasta que encontremos un divisor.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

Luego ahora hay que dividir por -1

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$$

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar **raíces enteras**.

$P(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$$

Sacamos **factor común** 2 en último binomio y encontramos una raíz racional.

$$2x - 3 = 2 (x - 3/2)$$

La **factorización del polinomio** queda:

$$\mathbf{P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2 (x -1) \cdot (x +1) \cdot (x +2) \cdot (x - 3/2)}$$

Las raíces son : $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$ y $x = 3/2$

20. M.C.D y m.c.m. de polinomios

Los conceptos son similares a los de los números naturales. Se entiende como el máximo común divisor de polinomios como el polinomio de mayor grado que es divisor a todos ellos, y el mínimo común múltiplo de varios polinomios como el polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos.

Para calcularlos se sigue el siguiente proceso:

1. Se descomponen los polinomios en factores
2. Para calcular el M.C.D. se multiplican los factores comunes con menor exponente
3. Para calcular el m.c.m. se multiplican los factores no comunes y los comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo:

$P(x) = x^3 +x^2-x -1 = (x+1)^2(x-1)$

$Q(x)= x^3+3x^2-x-2 =(x+1)(x-1)(x+3)$

M.C.D. $[P(x),Q(x)]= (x+1)(x-1) =x^2-1$

m.c.m. $[P(x), Q(x)]= (x+1)^2(x-1)(x+3) = x^4+4x^3+2x^2-4x-3$

21. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios, del tipo P(x)/Q(x) donde Q(x) es distinto de 0.

$$\frac{x-3}{x^2}\ ;\quad \frac{1}{x+2}\ ;\quad \frac{x^3-2x^2+x-1}{3x^2+2}$$

Dos fracciones algebraicas son **equivalentes** si al multiplicar sus términos en cruz se obtiene el mismo resultado.

$$\frac{x+2}{x^2-4} \ \text{y}\ \frac{1}{x-2}$$

En el ejemplo, $(x^2-4)(1) = (x+2)(x-2)$.

22. Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificar consiste en encontrar una fracción equivalente donde los polinomios de numerador y denominador tengan menor grado. Esto se hace por ejemplo quitando un factor común en denominador o denominador.

Si se eliminan todos los factores comunes en numerador y denominador, tendremos la fracción algebraica equivalente irreducible.

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

23. Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Se **descomponen** los **denominadores en factores** para hallarles el **mínimo común múltiplo**, que será el común denominador.

$$\frac{x}{x^2-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x^2+3x+2}$$

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x - 1)$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1) \cdot (x + 2)$$

$$\text{m.c.m.}(x^2 - 1,\ x^2 + 3x + 2) = (x+ 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$$

Dividimos el **común denominador** entre los **denominadores** de las fracciones dadas y el resultado lo **multiplicamos** por el **numerador** correspondiente.

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)} = (x+2)$$

$$\frac{x\cdot\ (x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{x^2+2x}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)} = (x-1)$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{(x-1)}{x^3+2x^2-x-2}$$

24. Suma/resta de fracciones algebraicas

Habrá que distinguir dos casos:

a) ***Con el mismo denominador se suman/restan los numeradores***

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)+R(x)}{Q(x)}$$

$$\frac{x^2-x}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{x+3}{x^2-5x+6}=$$

$$=\frac{x^2-x+1-(x+3)}{x^2-5x+6}=$$

$$=\frac{x^2-x+1-x-3}{x^2-5x+6}=$$

$$=\frac{x^2-2x-2}{x^2-5x+6}$$

b) ***Con distinto denominador, en primer lugar se ponen las** fracciones algebraicas **a** común denominador**, posteriormente se** suman/restan los numeradores**.***

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot S(x)+R(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=$$

$$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$$

$$\text{m.c.m.}\left(x+1,\ x^2-1,\ x-1\right)=(x+1)\cdot(x-1)$$

$$=\frac{x-1+2x-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{x-1+2x-x-1}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{2x-2}{(x+1)\cdot(x-1)}==\frac{2\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}==\frac{2}{(x+1)}$$

25. Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de fracciones algebraicas será una nueva fracción algebraica que tendrá por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores. Se recomienda simplificar el resultado al final.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 2x) \cdot (x^2 + 4x + 4)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 - 4)} =$$

$$= \frac{x(x-2) \cdot (x+2)^2}{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x+2)} =$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

26. División de fracciones algebraicas

El cociente de fracciones algebraicas será una nueva fracción algebraica que tendrá por numerador el producto del numerador de la primera fracción (dividendo) por el denominador de la segunda fracción (divisor), y por denominador el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor. Se recomienda simplificar el resultado al final.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} : \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + 4x + 4)} =$$

$$= \frac{x(x+2) \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2} =$$

$$= \frac{x}{x-3}$$

Ejercicios

1. **Calcula los valores numéricos de las siguientes expresiones algebraicas.**

Valor	Expresión algebraica	Valor numérico
$x=2$ $y=3$	$6x^3y$	
$x=9$	$\frac{2}{3}x+5$	
$x=3$ $y=2$	$8x^2y+2xy$	
$a=4$ $b=1$	$2a^2b^3$	

2. **Completa el siguiente cuadro.**

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado	Monomio Equivalente
$\frac{5}{3}a^2$				
$8y^3$				
$-5x$				
$6b^3$				
$-4yb^3$				
x^5a^2				

3. **Calcula las siguientes sumas de monomios.**

a. $2x + 5x - 4x =$

b. $2x^2 + 7x^2 - 3x^2 =$

c. $\frac{1}{2}xy + 3x^2y - \frac{2}{5}xy + 5x^2y =$

d. $3m + 5n - 8m - n =$

e. $7xb - 3b + 4x - 2xb + x =$

4. Calcula el producto de los siguientes monomios:

a. $(2x)(-x^3)(-3x^2)=$

b. $(-7b)(3b^4)(2b^2)=$

c. $a(-4ab)(-3b)=$

d. $(-2ab)(12a^2b)=$

5. Calcular las siguientes divisiones de polinomios:

$6a^5x^2\ y : 2a^3x =$

$6a^5x^2\ y : 3a^6x =$

6. Completa la siguiente tabla.

Polinomio	Grado	Término independiente	Valor numérico para x=2
$3x^2-5x+1$			
x^4-8			
x^3-x^2+5x			
$3x-2$			
$x^2-7x+10$			

7. **Calcula:**

a) $(- x^3 + 5x^2 - x + 1) + (5x^2 - x - 3)$
b) $(- x^3 + 5x^2 - x + 1) - (5x^2 - x - 3)$
c) $(6x^2 - x + 4) + (5x^3 - x - 1)$
d) $(6x^2 - x + 4) - (5x^3 - x - 1)$
e) $(x + 2y)^2 =$
f) $(2x^2 - y)^2 =$
g) $(2a + 3b)(2a - 3b) =$
h) $(-3a + b^2)(-3a - b^2) =$
i) $3x^3 - 2x^2 - 4x - 4 : x – 2$
j) $4x^4 + 3x^3 – 5x^2 – 2x : x + 3$

8. **Dados los polinomios:**

$P(x) = 4x^2 – 1$ **$Q(x) = x^3 − 3x^2 + 6x – 2$** **$R(x) = 6x^2 + x + 1$**

$S(x) = 1/2x^2 + 4$ **$T(x) = 3/2x^2 + 5$** **$U(x) = x^2 + 2$**

Calcular:

a) $P(x) + Q(x) =$
b) $P(x) − U(x) =$
c) $P(x) + R(x) =$
d) $2P(x) − R(x) =$
e) $S(x) + T(x) + U(x) =$
f) $S(x) − T(x) + U(x) =$

9. **Dados los polinomios:**

$P(x) = x^4 − 2x^2 − 6x − 1$ **$Q(x) = x^3 − 6x^2 + 4$** **$R(x) = 2x^4 − 2x − 2$**

Calcular:

a) $P(x) + Q(x) − R(x) =$
b) $P(x) + 2\,Q(x) − R(x) =$
c) $Q(x) + R(x) − P(x)=$

10. **Calcula:**

a) $(x^4 − 2x^2 + 2) \cdot (x^2 − 2x + 3) =$
b) $(3x^2 − 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 − x + 2) =$
c) $(2x^2 − 5x + 6) \cdot (3x^4 − 5x^3 − 6x^2 + 4x − 3) =$
d) $(x^4 − 2x^3 − 11x^2 + 30x − 20) : (x^2 + 3x − 2)$
e) $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 − 2x) : (x^2 − x + 3)$

11. **Divide por Ruffini:**

a) $(x^3 + 2x + 70) : (x + 4)$
b) $(x^5 - 32) : (x - 2)$
c) $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

12. **Halla el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(x^5 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$
b) $(2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10) : (x + 2)$
c) $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

13. **Indica cuáles de estas divisiones son exactas:**

a) $(x^3 - 5x - 1) : (x - 3)$
b) $(x^6 - 1) : (x + 1)$
c) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$
d) $(x^{10} - 1024) : (x + 2)$

14. **Comprueba que los siguientes polinomios tienen como factores los que se indican:**

a) $(x^3 - 5x - 1)$ tiene por factor $(x - 3)$
b) $(x^6 - 1)$ tiene por factor $(x + 1)$
c) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ tiene por factor $(x - 1)$
d) $(x^{10} - 1024)$ tiene por factor $(x + 2)$

15. **Hallar a y b para que el polinomio $x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.**

16. **Determina los coeficientes de a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.**

17. **Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé de resto 4.**

18. **Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces.**

19. **Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x= 5$.**

20. Calcular el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax + 8$ tenga como raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.

21. Factorizar y calcular las raíces de los polinomios

a) $x^3 + x^2$
b) $2x^4 + 4x^2$
c) $x^2 - 4$
d) $x^4 - 16$
e) $9 + 6x + x^2$
f) $x^2 - x - 6$
g) $x^4 - 10x^2 + 9$
h) $x^4 - 2x^2 - 3$
i) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$
j) $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$
k) $x^3 - x^2 - 4$
l) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
m) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$
n) $9x^4 - 4x^2 =$
o) $x^5 + 20x^3 + 100x =$
p) $3x^5 - 18x^3 + 27x =$
q) $2x^3 - 50x =$
r) $2x^5 - 32x =$
s) $2x^2 + x - 28 =$
t) $\frac{2}{5}x^5 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{14}{15}x^2 =$
u) $xy - 2x - 3y + 6 =$
v) $25x^2 - 1 =$
w) $36x^6 - 49 =$
x) $x^2 - 2x + 1 =$
y) $x^2 - 6x + 9 =$
z) $x^2 - 20x + 100 =$
aa) $x^2 + 10x + 25 =$
bb) $x^2 + 14x + 49 =$
cc) $x^3 - 4x^2 + 4x =$
dd) $3x^7 - 27x =$
ee) $x^2 - 11x + 30 =$
ff) $3x^2 + 10x + 3 =$
gg) $2x^2 - x - 1 =$

22. Simplificar las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+3x}=$

b) $\dfrac{x^2-3x}{3-x}=$

c) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}=$

d) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}=$

e) $\dfrac{x^3-19x-30}{x^3-3x^2-10x}=$

23. Calcula:

a) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}=$

b) $\dfrac{x+2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}=$

c) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}=$

d) $\dfrac{9-6x+x^2}{9-x^2}\cdot\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=$

e) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}:\dfrac{x^2-4}{x^3+8}=$

f) $\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+2x-3}:\dfrac{4x-2x^2}{x^3-2x^2+x}=$

g) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)=$

h) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)=$

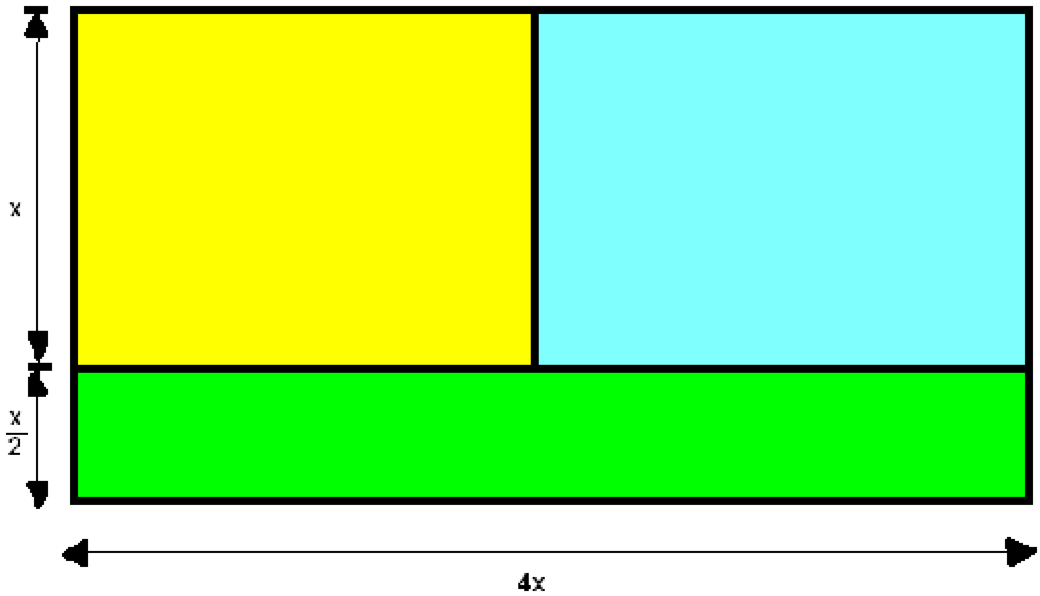
i) $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=$

24. Expresa en forma algebraica cada frase:

a) **Múltiplo de 3.**
b) **Número par**
c) **El cuadrado de un número más 5.**
d) **El triple de un número menos 7.**
e) **Tres números consecutivos.**
f) **Tres números pares consecutivos.**

A continuación indica de cada expresión algebraica obtenida: el coeficiente, la parte literal y el grado de los polinomios.

25. Dada la siguiente figura:



a) **Expresa algebraicamente el área de la figura verde. ¿Cuál es el grado de esta expresión?**

b) **Expresa algebraicamente el perímetro de la figura total. ¿Cuál es el grado de la expresión que has hallado?**

c) **Expresa algebraicamente el área de la figura total. ¿Cuál es el grado de esta expresión?**

26. **Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:**

P(x)=$3x^3-2x^2-3x+6$ **Q(x)=** $x-2$ y **R(x)=** x^2+2x

a) Q(x)+R(x)

b) P(x)-Q(x)

c) P(x)+Q(x)+R(x)

d) P(x)-Q(x)+R(x)

27. Completa la siguiente tabla efectuando para ello las siguientes operaciones necesarias:

	Valor para X=2	Valor para X=3	P(x)+S(x)+R(x)	P(x)-Q(x)+R(x)
$P(x)=3x^3-2x^2-3x+6$				
$Q(x)= 5x^3-2x^2-16$				
$R(x)= x^2+2x$				
$S(x)= 3x^2-1$				

28. Los ingresos y los gastos de una empresa en millones de euros, en función del número de años que lleva funcionando, vienen dados por:

$I(t)=5t^4+t^2-3t+5$

$G(t)=3t^3-t^2-4t+9$

Halla la expresión de los beneficios de la empresa B(t).

29. Calcula:

a) $(x^3+1)\cdot(4x+3)$
b) $(x^4-x^2)\cdot(2x-4)$
c) $(x^3+x^2)\cdot(2x^3+4x-2)$
d) $2x^3(1-4x)\cdot(3x^2+x)$
e) $(x^3-2x+1)\cdot(5x+6)\cdot4x^3$
f) $(6x^2+5x+7)\cdot4x(3-x^2)$

30. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(x^5-6x^3-3x^2+2x-1\right)*\left(x^3-3x+1\right)$

b) $\left(x^4-7x^3-3x^2+2x-1\right)*\left(x^3+4x^2-6x+2\right)$

31. Calcula las siguientes divisiones de polinomios y señala las que son exactas.

P(x)	Q(x)	Cociente	Resto	¿Es exacta?
x^4+3x^2-2	$x+3$			
$x^4+3x^3-x^2+x-4$	$x-1$			
x^2-5x+6	$x-2$			

32. Dados los polinomios

$P(x)=2x^4+3x^3-2x^2+x-4$ y

$Q(x)=P(x)=x^2-x+2$

Realiza la división y haz la prueba mediante la propiedad fundamental de la división.

33. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(x^4-5x^3+11x^2-12x+6):(x^2-x+2)$

b) $(x^5-2x^4+3x^2-5x+6):(x^2+3x-1)$

34. Realiza estas divisiones con el método de Ruffini.

DIVIDENDO	DIVISOR
x^4+5x^2-2	$x-3$
$x^4+2x^3-x^2+x-4$	$x-2$
x^2-5x+3	$x-1$

35. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las igualdades notables.

a) $(a+3b)^2$	**c)** $(3a+2b)^2$	**f)** $(3x-4)^2$	**h)** $(4x+3y)^2$
b) $(a-3b)^2$	**d)** $(a+3b)\cdot(a-3b)$	**g)** $(2xy-x)^2$	**i)** $(3x+y)^2$

36. Expresa el resultado en función de las igualdades notables:

a) $9x^2+y^2+6xy$ c) $x^2+49-14x$ e) $16x^4-8x^2+1$

b) $25x^2+100+100y$ d) x^4+12x^2+36 f) x^4-x^2

37. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x-2)(x+2)-(x^2+4)$
b) $(3x-1)^2-(3x+1)^2$
c) $2(x-5)^2-(2x^2+3x+50)$
d) $(2x-4)^2-(2x+4)(2x-4)$
e) $(5x-4)(2x+3)-(x+3)^2$

38. Descompón en producto de factores los siguientes polinomios:

a) $5x^5-25x^3$ b)$-x^2+4x+5$ c)x^2+5x-6 d)$2x^3-3x^2+1$

e) $25x^2-9$ f)$16x^2-8x+1$ g)$8x^3-12x^2+4$ h)x^4-5x^2+4

i) $7x^3-35x^4$ j)$3(x+2)+x(x+2)$ k)$16x^4-1/25x^2$ l)$32/2x^2-8/2$

39. Indica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones. Para las no sean ciertas, escribe un ejemplo que demuestre su falsedad.

a) A veces, el grado del producto de dos polinomios es igual al grado del mayor.

b) El coeficiente principal del producto de dos polinomios es igual al producto de los coeficientes principales de los dos polinomios.

c) El grado de la suma de dos polinomios nunca puede ser mayor de los grados

d) El coeficiente principal de la suma de dos polinomios es igual a la suma de los coeficientes principales de los dos polinomios.

40. Ana tiene x €, Juan el doble que Ana mas 5€, Pedro el triple que Juan menos 10 € e Isabel cuatro veces la cantidad que tiene Pedro menos 5€.

a) ¿Cuántos euros tiene cada uno comparándolo con los que tiene Ana?

b) ¿Cuántos tienen entre todos?

c) Si Ana tiene 7 €, ¿Cuántos tienen entre todos?

41. Expresa en forma algebraica:

a) **El cuadrado del triple de x+1**
b) **El doble de la suma de dos números distintos.**
c) **El doble del cubo de un número menos el cuadrado del doble de otro.**
d) **La suma de x e y al cuadrado menos el cuadrado de su diferencia.**
e) **El doble de un número menos su tercera parte**
f) **El triple del resultado de sumarle tres unidades a un número.**
g) **El área de un triangulo de base t y altura z.**
h) **Dos números consecutivos cuyo producto es 18.**
i) **La suma de tres cubos.**
j) **Un múltiplo de 5 más su doble.**
k) **El producto de dos pares consecutivos.**

42. Considera estos polinomios:

$A(x)= 3x^3-5x^2+x-1$

$B(x)= 2x^4+x^3-2x+4$

$C(x)= -x^3+3x^2-7x$

Halla:

a) **A(x)+B(x)**
b) **A(x)-C(x)**
c) **A(x)-B(x)+C(x)**
d) **B(x)·C(x)**
e) **B(x)·A(x)**

43. Efectúa cada división indicando el polinomio cociente y el polinomio resto.

a) $(x^5-3x^4+x^3+2x^2+x):(x^2+x+1)$
b) $(2x^4+2x^2+3):(x^2+x-1)$
c) $(x^6-x^3+x-1):(x^3-x+2)$

44. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(2x+y)^2$ c) $(a-b^2)\cdot(a+b^2)$
b) $(3x-y^2)^2$ d) $(x^2-3y)^2$

45. Convierte las siguientes expresiones algebraicas en potencias o productos:

a) $9x^2+y^2+6xy$
b) $x^4y^2+12x^2y+36$
c) $x^2+6x^3-5x^4$
d) $3x^2y^4+6x^3y-9x^4y^2$
e) $25y^2+100+100y$
f) $x^2+49-14x$
g) $12x^4-16x^3+6x^3$
h) $3x(x-4)+2x^2(x-4)-5(x-4)$

46. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $(x+2)^3$, para $x=-2$
b) x^3+8, para $x=-2$
c) x^3y-4xy^3+y, para $x=1$ e $y=-1$

47. Utilizando los productos notables, desarrolla estas expresiones:

a) $(3x-9)^2$
b) $(a^2+3b)^2$
c) $(x^2-3y)\cdot(x^2+3y)$
c) $(2x^2+y)^2$
d) $(3x-y)\cdot(3x+y)$
e) $(2xy^2-2x)^2$

48. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia:

a) $x^2+49-14x$
b) $4x^2+1+4x$
c) x^2+1-2x
d) $x^2+12+36$

49. Saca factor común en las expresiones siguientes (recuerda que multiplicando el resultado puedes saber si está bien):

a) x^2+xy
b) $3x^2y^3-xy^2+5x^3y^4$
c) $2x^2y-3xy^3-x$
d) $2u^2v^2z^5-6uv^3z^4-12u^3v^2z^3$
e) $\dfrac{6a^2}{25}+\dfrac{4ab}{5}-\dfrac{2a^3b}{15}$
f) $\dfrac{5x^3y^2}{2}-\dfrac{x^2y^2}{4}+\dfrac{3x^5y}{8}$

50. Simplifica las siguientes fracciones algebráicas:

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=$ b) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}=$ c) $\dfrac{-9+x^2}{x^2+2x-15}=$ d) $\dfrac{x^4-1}{x^4-x^3-x^2-x-2}=$

e) $\dfrac{4x^3-4x}{x^6+x^5}=$ f) $\dfrac{-2x^2+x}{-2x^2+9x-4}=$ g) $\dfrac{9x-x^3}{x^3+3x^2}=$

Soluciones : a) $\dfrac{x-3}{x}$ b) $\dfrac{x+1}{x}$ c) $\dfrac{x+3}{x+5}$ d) $\dfrac{x-1}{x-2}$ e) $\dfrac{4(x-1)}{x^4}$ f) $\dfrac{x}{x-4}$ g) $\dfrac{3-x}{x}$

51. Calcula:

a) $\dfrac{2x^2-5x}{x^2-9}-\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-9}=$ b) $\dfrac{-3x+1}{x+1}-\dfrac{5x+1}{x^2+x}=$ c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2-x}{x}+\dfrac{3-2x}{x}=$

d) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-2x}=$ e) $\dfrac{2}{x^2-16}-\dfrac{1}{x^2+4x}=$ f) $\dfrac{-2}{x^3}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x}=$

g) $\dfrac{x}{x^2-3x-4}-\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{x^2-6x-4}{x^3-4x^2-x+4}=$

Soluciones : a) $\dfrac{-1}{x-3}$ b) $\dfrac{-3x-1}{x}$ c) $\dfrac{2-x}{x}$ d) $\dfrac{2}{x}$ e) $\dfrac{1}{x(x-4)}$ f) $\dfrac{3x^2-5x-2}{x^3}$ g) $\dfrac{1}{x^2-1}$

52. Calcula:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{x-5}=$ b) $\dfrac{2x+4}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{x+2}=$ c) $\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^3-6x^2}=$

d) $\dfrac{5x^3}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}=$ e) $\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)\cdot\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=$ f) $\left(2+\dfrac{8}{x-2}\right)\cdot\dfrac{1}{x+2}=$

g) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x^2}{x+1}=$

Soluciones : a) $\dfrac{2x+1}{(x-2)(x-5)}$ b) $\dfrac{2}{x-3}$ c) $\dfrac{(x-2)(x-1)}{2x}$ d) $5x^2$ e) $\dfrac{x}{x-1}$ f) $\dfrac{2}{x-2}$ g) $\dfrac{-x}{x-1}$

53. Calcula:

a) $\frac{1}{2x^2} : \frac{x+3}{4x} =$ b) $\frac{1}{8x^3} : \frac{4x+2}{3x^5} =$ c) $\frac{4x^2}{x+1} : \frac{x^2-x}{x^2-2x+1} =$ d) $\frac{x+2}{2x+3} : \frac{x^2-4}{-6x-4x^2} =$

e) $\frac{2x^2}{3x^2-3} : \frac{x}{x+1} =$ f) $\frac{x^2-5x+6}{2x+1} : \frac{x-2}{x} =$ g) $\frac{-x+7}{x^2-1} : \frac{-x^2+5x+14}{x^2+3x+2} =$

Soluciones : a) $\frac{2}{x(x+3)}$ b) $\frac{3x^2}{16(2x+1)}$ c) $\frac{4x(x-1)}{x+1}$ d) $\frac{-2x}{x-2}$ e) $\frac{2x}{3(x-1)}$ f) $-\frac{x-1}{x-5}$ g) $\frac{3}{x-1}$

54. Calcula:

a) $\frac{-8x}{x^2+4x+4} + \frac{3x}{x^2+3x+2} =$ b) $\frac{5x+5}{x^2+2x} - \frac{5}{x^2} + \frac{4x-5}{x+2} =$ c) $\frac{x^2-x-2}{x^3+7x^2+10x} + \frac{1}{x^2+5x} - \frac{1}{x^3} =$

d) $\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{3x^3-3x^2-4x}{2x-3} - x^2 \right) =$ e) $\left(\frac{-3x^2}{x^2-1} + 4 \right) \cdot \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right) =$ f) $\left(\frac{1}{x} - 2 + x \right) \frac{x^3}{x^2-1} =$

g) $\left(\frac{2x^2+21}{(x-3)^2} + \frac{7}{x-3} \right) : \frac{2x+7}{x^2-9} =$ h) $\left(1 - \frac{1}{x} \right) : \frac{3x-3}{x^6} + \frac{1}{x} =$ i) $\left(\frac{2x}{x-5} : \frac{3x^2}{x^2-25} \right) : \frac{2(x+5)}{x} =$

Soluciones : a) $\frac{-x(5x+2)}{(x+2)^2(x+1)}$ b) $\frac{4x^3-10}{x^2(x+2)}$ c) $\frac{x^4-x^2-7x-10}{x^3(x+2)(x+5)}$ d) $\frac{x^2-4}{x(2x-3)}$ e) $\frac{1}{x-1}$ f) $\frac{x^2(x-1)}{x+1}$

g) $\frac{x(x+3)}{x-3}$ h) $\frac{x^6+3}{3x}$ i) $\frac{1}{3}$