

Bloque 1. Aritmética y Álgebra

8. Proporcionalidad numérica

1. Definición de logaritmo

Un logaritmo de un número x , en una base a dada, es el exponente y al cuál se debe elevar la base para obtener ese número.

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$$

$$a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Ejemplos:

$$\log_2 4 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$\log_2 4 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$\log_2 1 = 0$$

$$2^0 = 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y = 2$$

$$\log_{\sqrt{5}} 125 = y$$

$$\sqrt{5}^y = 125$$

$$5^{\frac{1}{2}y} = 5^3$$

$$y = 6$$

$$\log 0.001 = y$$

$$10^y = 0.001$$

$$10^y = 10^{-3}$$

$$y = -3$$

$$\ln \frac{1}{e^5} = y$$

$$e^y = \frac{1}{e^5}$$

$$e^y = e^{-5}$$

$$y = -5$$

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$$

$$\sqrt{3}^y = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$$

$$3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}}$$

$$y = -\frac{8}{5}$$

2. Propiedades de los logaritmos

- 1) No existe el logaritmo de un número con base negativa.

$$\nexists \log_{-a} x$$

- 2) No existe el logaritmo de un número negativo.

$$\nexists \log_a (-x)$$

- 3) No existe el logaritmo de cero.

$$\nexists \log_a 0$$

- 4) El logaritmo de 1 es cero.

$$\log_a 1 = 0$$

- 5) El logaritmo en base a de a es uno.

$$\log_a a = 1$$

- 6) El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.

$$\log_a a^n = n$$

3. Logaritmos de las operaciones

- 1) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

- 2) El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 \left(\frac{8}{4} \right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

- 3) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

- 4) El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_2 (\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

4. Logaritmos utilizados frecuentemente

Logaritmos decimales: Son los que tienen **base 10**. Se representan por **log (x)**.

Logaritmos neperianos: Son los que tienen **base e**. Se representan por **ln (x)** o **L(x)**.

5. Aplicaciones de los logaritmos

Como aplicaciones de los logaritmos podemos ver la escala de Richter, o el pH de las disoluciones.

La **escala de Richter** sirve para medir la magnitud de un terremoto. Los terremotos son registrados por unos aparatos denominados sismógrafos, que miden su Amplitud (A) en micrómetros y su período (p) en segundos. Con estos datos se calcula la magnitud del terremoto como **M = log (A/p)**.

El **pH de una disolución** sirve para medir el grado de acidez de la misma. El pH se define como **pH=-log[H⁺]**, es decir, el negativo del logaritmo de la concentración de iones de hidrógeno expresada en moles/litro.

Ejercicios

1. Halla el valor de estos logaritmos sin usar la calculadora, sabiendo que $\log_2=0,301$ y $\log_3=0,477$.

- a) $\log 72$
- b) $\log 150$

2. Calcula x en las siguientes expresiones:

- a) $\log_x 25 = 2$
- b) $\log_4 x = 4$

3. Halla el valor de x utilizando la definición de logaritmo

- a) $\log_3 729 = x$
- b) $\log_4 1/256 = x$
- c) $\log_3 \sqrt{9} = x$
- d) $\log_{1/3} 81 = x$
- e) $\log_5 (25/\sqrt{5}) = x$
- f) $\log_{\sqrt{2}} 512 = x$

4. Expresa en función de $\log_a x$, $\log_a y$, $\log_a z$.

- a) $\log_a (2x^2y^4z)$
- b) $\log_a (x^3z^2) / y^3\sqrt{z}$
- c) $\log_a \sqrt{x^3y^5z^7}$

5. Sabiendo que $\log 2 = 0,301$, halla el valor de los logaritmos siguientes sin usar calculadora:

- a) $\log 5$
- b) $\log 1/25$
- c) $\log 1/128$

6. Calcular por la definición de logaritmo el valor de x o y.

- $\log_1 0.25 = y$
- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$
- c) $\log 0.001 = y$
- d) $\ln \frac{1}{e^5} = y$
- e) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$

f) $\log_2 32 = x$

g) $\log_9 \frac{1}{3} = x$

h) $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = x$

i) $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$

j) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = x$

k) $\log_x 81 = -4$

l) $\log_2 x^3 = 6$

7. Conociendo que $\log 2 = 0.3010$, calcula los siguientes logaritmos decimales.

a) $\log 0.02$

b) $\log \sqrt[4]{8}$

c) $\log 5$

d) $\log 0.0625$

8. Calcular los logaritmos de de las expresiones que se indican:

a) $\ln \frac{x^2 \cdot y \cdot (m+n)}{m \cdot n} =$

b) $\log_2 \frac{a^2 - b^2}{a \cdot b} =$

c) $\log 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

9. Calcula mediante logaritmos el valor de x.

a) $x = \sqrt[5]{493}$

b) $x = \frac{\sqrt[3]{0.3688}}{22.958^5}$

c) $x = \frac{425 \cdot \sqrt{2.73}}{\sqrt[3]{48.4}}$