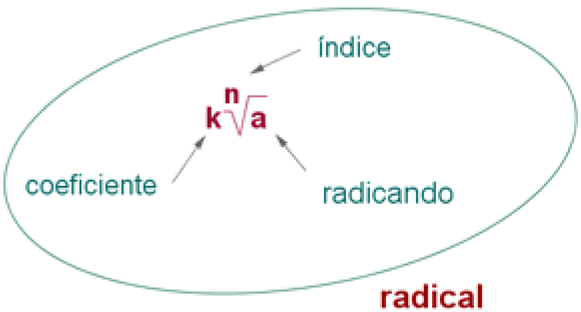
Bloque 1. Aritmética y Álgebra

6. Los números reales: radicales

1. Definición de radical

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que n $\in \mathbb{N}$ y a $\in \mathbb{R}$; con tal que cuando *a* sea negativo, *n* ha de ser impar.



$$\sqrt{64} = \pm 8 \qquad \sqrt{-64} \notin \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2$$

Obsérvese que la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución, pero la raíz cúbica sí. Esto se debe a que si el número a es negativo, sólo una potencia con exponente impar podría dar un resultado negativo, mientras que las potencias con exponente par siempre darán un resultado positivo (independientemente de si la base es positiva o negativa). Por tanto, la raíz de un número negativo sólo existirá si el índice es impar.

2. Expresión de un radical en forma de potencia

Se puede expresar un radical en forma de potencia como:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$$

3. Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Por tanto, si se multiplican o dividen el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

4. Simplificación de radicales

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o a todos los exponentes de la descomposición factorial) del radicando, se obtiene un radical simplificado.

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

5. Reducción de radicales a índice común

Si tenemos varias raíces con distintos índices, podemos escribirlas de forma que tengan el mismo índice, siguiendo el siguiente proceso:

1. Hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice
2. Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} \qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$$

$$\text{m.c.m.}(2,\ 3,4) = 12$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^2\right)^4} \qquad \sqrt[12]{\left(2^2\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^3}$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} \qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$$

6. Extracción de factores fuera del signo radical

Para la extracción de factores, primero hay que descomponer el radicando en factores primos, y entonces se tienen en cuenta las siguientes premisas:

a) Si un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando.

b) Si un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando.

c) Si un exponente es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando.

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

7. Introducción de factores dentro del signo radical

Para introducir un factor dentro de un radical, se introducen los factores elevados al índice correspondiente del radical.

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^4 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

7. Suma y resta de radicales

Solamente pueden sumarse (o restarse) dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales con el mismo índice e igual radicando.

$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\sqrt[4]{5} = 0$$

$$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

8. Multiplicación de radicales del mismo índice

Para multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación extraeremos factores del radical, si es posible.

9. Multiplicación de radicales del distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se multiplican.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$$

$$m.c.m.(2, 3, 4) = 12$$

$$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\ \sqrt[12]{3^{11}}$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$$

$$m.c.m.(2, 3) = 6$$

$$\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10} \cdot 3^7} = 6\sqrt{2^4 \cdot 3}$$

10. División de radicales del mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

11. División de radicales del distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se dividen.

Cuando terminemos de realizar una operación simplificaremos el radical, si es posible.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^8\right)^3}{\left(2^4\right)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} = \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\sqrt[3]{2^2} = 4\sqrt[3]{4}$$

12. Potencia de radicales

Para elevar un radical a una potencia se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{\left(2 \cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4} \cdot \sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{\left(2^2 \cdot 3\right)^4} \cdot 18}{\sqrt{(2 \cdot 3)^4}} =$$

$$= \frac{18 \cdot \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4}}{\sqrt{2^4 \cdot 3^4}} = 18\sqrt[6]{\frac{\left(2^8 \cdot 3^4\right)^2}{\left(2^4 \cdot 3^4\right)^3}} = 18\sqrt[6]{\frac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}}} =$$

$$= 18\sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

13. Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(2^4\right)^4\cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16}\cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$$

14. Racionalización

Consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1) **Del tipo**

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

2) Del tipo

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3) Del tipo

$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ **, y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a+b \quad\rightarrow\quad a-b$$

$$-a+b \quad\rightarrow\quad -a-b$$

$$a-b \quad\rightarrow\quad a+b$$

$$-a-b \quad\rightarrow\quad -a+b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados".

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2-3} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{4-2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{\left(4 - 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)} = \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{\left(4 - 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{16 - 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \left(5 + 2\sqrt{6}\right)}{\left(5 - 2\sqrt{6}\right) \cdot \left(5 + 2\sqrt{6}\right)} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{12}}{5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 3}}{25 - 4 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}{25 - 24} = 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$

Ejercicios

1. Expresa como potencias los siguientes radicales:

a) $\sqrt{\frac{1}{49}}$; b) $\sqrt[3]{125}$; c) $\sqrt{-25}$; d) $\sqrt[3]{-27}$; e) $\sqrt[4]{-16}$; f) $\sqrt[5]{-32}$.

g) $\sqrt{3}$; h) $\sqrt[3]{5^2}$; i) $\sqrt{7^{-1}}$; j) $\sqrt[10]{13}$; k) $\sqrt[7]{6^{-2}}$; l) $\sqrt[6]{2^{18}}$.

2. Escribir en forma radical las siguientes potencias de exponente fraccionario:

a) $2^{\frac{1}{2}}$; b) $7^{\frac{2}{3}}$; c) $3^{-\frac{1}{2}}$; d) $10^{\frac{3}{7}}$; e) $5^{0'4}$; f) $8^{-\frac{2}{3}}$; g) $15^{1'\widehat{3}}$; h) $15^{1'3}$.

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt[3]{5^2}$; c) $\sqrt{7^{-1}}$; d) $\sqrt[10]{13}$; e) $\sqrt[7]{6^{-2}}$; f) $\sqrt[6]{2^{18}}$.

3. Simplificar los radicales siguientes:

a) $\sqrt[4]{2^6}$; b) $\sqrt[4]{3^{12}}$; c) $\sqrt[6]{27}$; d) $\sqrt[3]{1000\,000}$; e) $\sqrt[18]{5^9}$; f) $\sqrt[9]{64}$.

4. Calcular y expresar el resultado en forma de potencia:

a) $\sqrt[3]{6}:2^{\frac{1}{3}}=$; b) $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3}}=$; c) $\frac{\sqrt{3}\cdot 81^{\frac{1}{3}}}{3\cdot\sqrt{27}}=$; d) $\frac{1}{\sqrt{x}}=$; e) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=$; f) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=$;

g) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=$; h) $\frac{1}{x\sqrt{x}}=$; i) $\sqrt{2^3\cdot\sqrt[3]{2^2\sqrt{\sqrt{2}}}}=$; j) $\frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{x}}\right)^2\cdot\sqrt{x^3}\cdot x^4}{\left(x\cdot\sqrt{x}\right)^3}=$.

5. Operar y simplificar, dando el resultado en forma radical:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}=$; b) $\sqrt[3]{4}:\sqrt[6]{2}=$; c) $\sqrt[3]{32}:\sqrt{2}=$; d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}=$; e) $\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{3}=$

6. Extraer factores del radical:

a) $\sqrt{12}$; b) $\sqrt{45}$; c) $\sqrt[3]{54}$; d) $\sqrt{36\,000}$; e) $\sqrt{a^4\cdot b^7\cdot c^5}$; f) $3\sqrt{8a^3}$;

g) $\sqrt[3]{81x^{10}y^4z}$; h) $\sqrt[3]{2000}$; i) $\sqrt{2500}$; j) $\sqrt[4]{\frac{625ab^7}{a^5b^3}}$; k) $\sqrt[3]{\frac{8x^4y^3z}{n^6}}$.

7. Sumar los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{50}+\sqrt{200}-\sqrt{32}=$;

b) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{500}+\sqrt{80}=$;

c) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}=$;

d) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}=$;

e) $\sqrt{18}-3\sqrt{12}+5\sqrt{50}+4\sqrt{27}=$;

f) $\frac{2}{3}\sqrt{5}-\frac{5}{6}\sqrt{20}=$;

g) $3\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{250}=$;

h) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{32}-\frac{3}{4}\sqrt[4]{162}+\frac{5}{6}\sqrt[4]{1250}=$

i) $\sqrt{\frac{3}{16}}-4\sqrt{12}=$

j) $\sqrt{\frac{1}{2}}+3\sqrt{\frac{1}{8}}=$;

k) $\sqrt{27}+3\sqrt{8}-\sqrt{112}-\sqrt{50}=$.

8. Calcula:

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[6]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=$

b) $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}}=$

9. Extrae factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5^5}$

b) $\sqrt[4]{2^7\cdot 3^{14}\cdot 5^4}$

10. Introduce factores en los siguientes radicales:

a) $2\sqrt{3}$

b) $2^2\cdot 3^3\ \sqrt[4]{6}$

11. Pon con índice común los siguientes radicales:

$\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}$ $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$

12. Realiza las sumas:

a) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}$

b) $3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75}$

d) $\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64}$

13. Halla las siguientes operaciones de radicales:

a) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27} =$

b) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} =$

c) $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$

d) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} =$

e) $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[6]{4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} =$

g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$

h) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$

i) $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$

j) $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} =$

k) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$

l) $\dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$

m) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}} =$

n) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{8}}}} =$

o) $\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 =$

p) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$

q) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^2 =$

r) $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 =$

s) $\left(\sqrt{5} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) =$

t) $\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right) =$

u) $\dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} =$

v) $\sqrt{\dfrac{a - b}{\left(a - b\right)^2} \cdot \dfrac{a + b}{a^2 - b^2}} =$

w) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} =$

x) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$

y) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}} =$

14. Racionalizar los radicales:

a) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}} =$

b) $\dfrac{2}{3\sqrt[5]{4}} =$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

d) $\dfrac{2}{4-2\sqrt{2}} =$

e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}} =$

f) $\dfrac{5}{2\sqrt{2}} =$

g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} =$

h) $\dfrac{2}{3+\sqrt{3}} =$

i) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$

j) $\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} =$