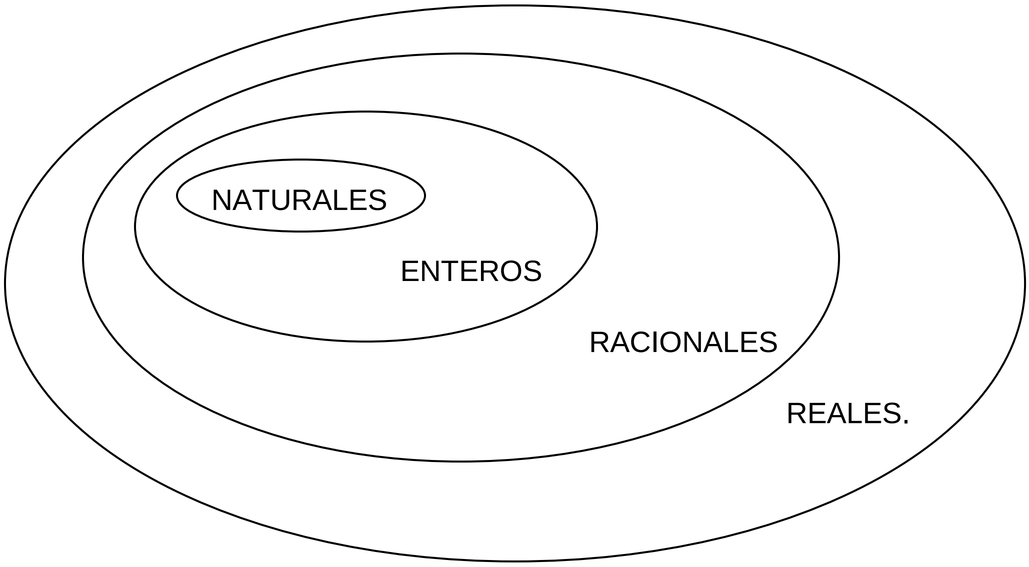
Bloque 1. Aritmética y Álgebra

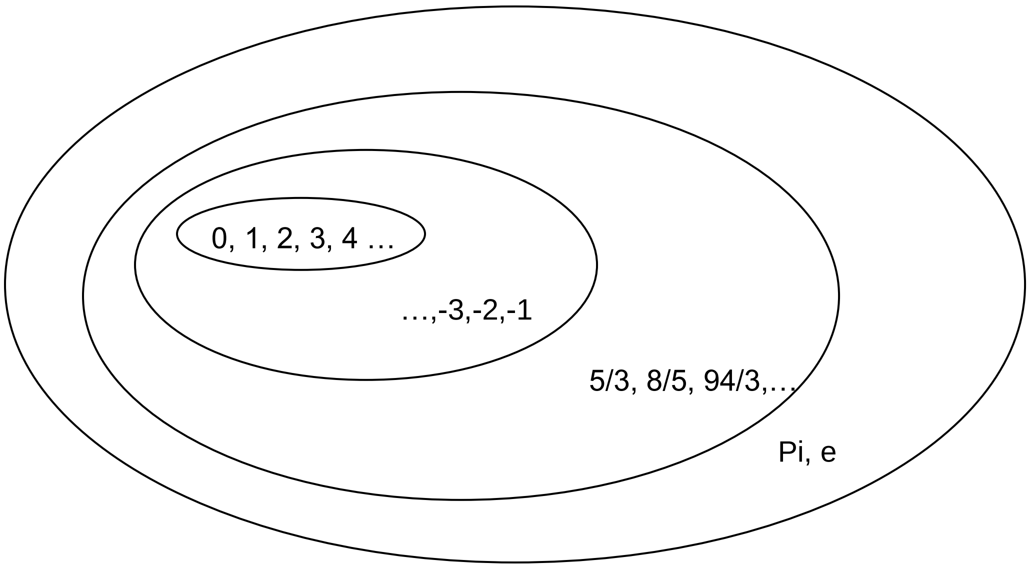
5. Los números reales

1. Los números reales

Los **números reales** ($\mathbb{R}$) incluyen tanto a los números racionales (que a su vez incluyen a los enteros, y estos a los naturales) y a los números irracionales. Si representaramos estos conjuntos gráficamente, nos quedaría así:



Como se puede apreciar, el conjunto de los números naturales estaría incluido dentro del conjunto de números enteros. A su vez, el conjunto de números enteros está incluido dentro del de los números racionales, y los racionales dentro de los reales. El conjunto de los números reales por tanto es la suma de los números racionales e irracionales.



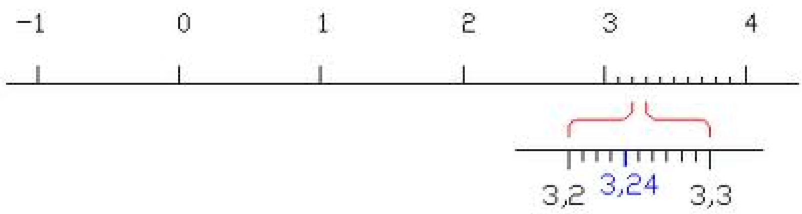
Como se puede apreciar, el conjunto de los números naturales estaría incluido dentro del conjunto de números enteros. A su vez, el conjunto de números enteros está incluido dentro del de los números racionales, y los racionales dentro de los reales.

Ejemplos de números –

Número	**¿Natural?**	**¿Entero?**	**¿Racional?**	**¿Irracional?**	**¿Real?**
3	Sí	Sí	Sí (ej 6/2)	No	Sí
0	Sí	Sí	Sí (ej 0/1)	No	Sí
-1	No	Sí	Sí (ej -2/2)	No	Sí
2,5	No	No	Sí (ej 5/2)	No	Sí
0,666666…	No	No	Sí (ej 2/3)	No	Sí
Pi	No	No	No	Sí	Sí

2. La recta real

Los números reales se pueden representar en una recta, de forma que a cada número real le corresponde un único punto de dicha recta, y recípcrocamente, a cada punto de la recta real le corresponde un único número.



3. Ordenación

Dados dos números reales cualesquiera x, y, se dice que x > y sí y sólo sí x-y>0. En la recta, los números están ordenados de menor a mayor de izquierda a derecha, por lo que cualquier valor que esté más a la derecha en la recta será mayor que otro valor que quede más a la izquierda.

El orden de los números reales verifica las siguientes propiedades:

1. Si x>y, entonces x+z>y+z para cualquier número real z
2. Si z>0 y x>y, entonces x*z>y*z
3. Si z<0 y x>y, entonces x*z<y*z

4. Distancia

Se define la distancia entre dos puntos reales x e y como el valor absoluto de su diferencia:

$$d(x,y) = |x-y|$$

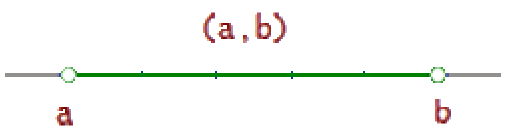
Ejemplos:

$$d(7,5) = |7-5| = |2| = 2$$

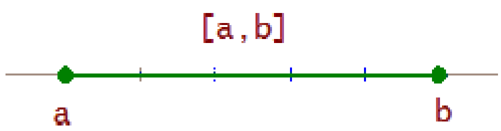
$$d(14,21) = |14-21| = |-7| = 7$$

5. Intervalos

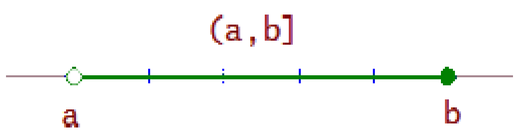
Intervalo abierto (a,b) o]a,b[: el intervalo abierto de origen a y extremo b es el conjunto de los números reales x que verifican $a<x<b$. Se representa como:



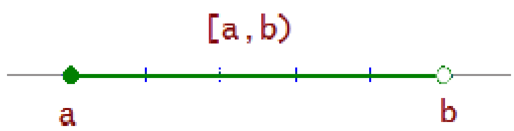
Intervalo cerrado [a,b]: el intervalo abierto de origen a y extremo b es el conjunto de los números reales x que verifican $a \leq x \leq b$. Se representa como:



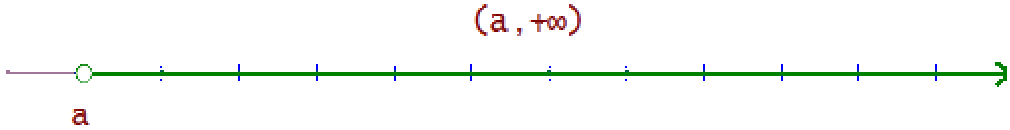
Intervalo semiabierto por la izquierda (a,b] o]a,b]: el intervalo abierto de origen a y extremo b es el conjunto de los números reales x que verifican $a < x \leq b$. Se representa como:



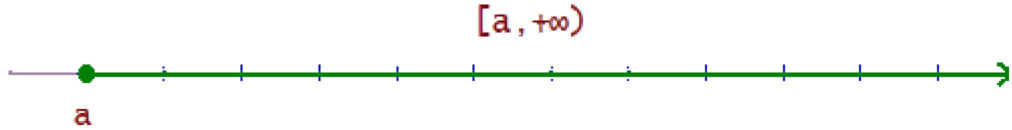
Intervalo semiabierto por la derecha [a,b) o [a,b[: el intervalo abierto de origen a y extremo b es el conjunto de los números reales x que verifican $a \leq x< b$. Se representa como:



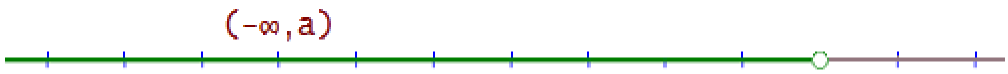
Semirrecta abierta por la izquierda (a,+∞) o]a,+∞[: es el conjunto de números reales x que verifican x > a. Se representa como:



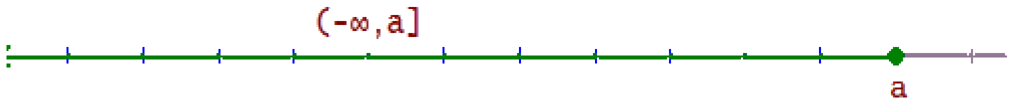
Semirrecta cerrada por la izquierda [a,+∞) o [a,+∞[: es el conjunto de números reales x que verifican x ≥ a. Se representa como:



Semirrecta abierta por la derecha (-∞,a) o]-∞,a[: es el conjunto de números reales x que verifican x < a. Se representa como:

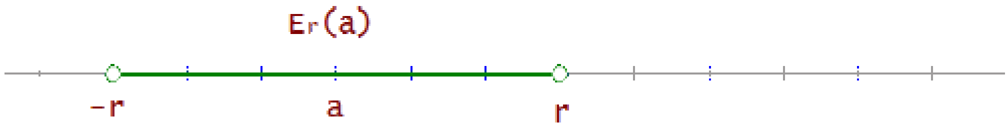


Semirrecta cerrada por la derecha (-∞,a] o]-∞,a]: es el conjunto de números reales x que verifican x ≤ a. Se representa como:



6. Entorno

Se define como entorno de un punto de centro **a** y radio **r > 0**, y se denota como **E_r (a),** al intervalo abierto **(a-r,a+r)**



7. Cifras significativas, estimaciones y aproximaciones

Los datos con que trabajan los científicos son el resultado de medir las magnitudes que intervienen en aquellos fenómenos que estudian. Sin embargo, las limitaciones del instrumental utilizado para realizar las medidas hacen que no se pueda conocer el valor con una exactitud del 100% el valor medido, sino que lo que se obtiene en realidad es un valor muy aproximado. Por ejemplo, si al medir con un flexómetro se obtiene una medida de 123 mm, podríamos asegurar que el valor exacto está entre 122 y 124 mm, ya que se asume un margen de error acotado no superior a 1 mm (que es la mínima división del flexómetro).

En este ejemplo, los tres digitos de la medida se dividirían en los dos primeros, que son digitos exactos, más el último que está sujeto a un margen de error. Estas tres cifras serían las **cifras significativas** de la medida, que se definen como aquellas cifras que se conocen con certeza más una última cifra sujeta a error.

Las cifras significativas son los dígitos de un número que consideramos no nulos.

Norma	**Ejemplo**
Son significativos todos los dígitos distintos de cero.	**8723** tiene **cuatro** cifras significativas
Los ceros situados entre dos cifras significativas son significativos.	**105** tiene **tres** cifras significativas
Los ceros a la izquierda de la primera cifra significativa no lo son.	**0,005** tiene **una** cifra significativa
Para números mayores que 1, los ceros a la derecha de la coma son significativos.	**8,00** tiene **tres** cifras significativas
Para números sin coma decimal, los ceros posteriores a la última cifra distinta de cero pueden o no considerarse significativos. Así, para el número 70 podríamos considerar una o dos cifras significativas. Esta ambigüedad se evita utilizando la notación científica.	$\mathbf{7 \cdot 10^2}$ tiene **una** cifra significativa $\mathbf{7{,}0 \cdot 10^2}$ tiene **dos** cifras significativas

Muchas veces, no es necesario tener el valor exacto de una medida, sino tan sólo una estimación. **Estimar una medida** consiste en establecer un **valor aproximado** sin ayuda de instrumentos, normamlemente comparándola con otra de cuya magnitud tenemos información. Por ejemplo, si tenemos un edificio de 20 plantas y sabemos que la altura de una planta está en torno a unos 3,5 m, podemos concluir que la altura estimada del edificio sería 20x3,5=70m.

Además, en la práctica, es posible obtener medidas que tengan una cantidad de cifas extremadamente alta, lo cuál hace que tengamos que trabajar con números incómodos por su extremada longitud. Para evitar esto, se suelen usar las **aproximaciones** a un orden determinado (décimas, centésimas, milésimas, etc).

Cuando suprimimos las cifras decimales a partir de un orden, decimos que se ha hecho un **truncamiento.** Por ejemplo, el número 2,347 truncado a la centésima sería 2,34. Otra forma de aproximar es por **redondeo**, donde se suprimen cifras hasta un orden, exactamente igual que en el truncamiento, pero con la salvedad de que la cifra que queda más a la derecha quedará igual si la que tenía inmediatamente a la derecha es menor que 5, o se le suma uno si esa cifra era mayor o igual que 5 (en este caso, si la cifra a sumarle esa unidad es 9, pasaría a 0 y se le sumaría una unidad a la que tenga a su izquierda, y así sucesivamente). Según esto, el número 2,347 redondeado a la centésima sería 2,35.

8. Error absoluto

Al aproximar un número real se comete, inevitablemente, un error. Para cuantificarlo se define el error absoluto como la diferencia entre el número real y la aproximación.

$$\mathbf{E_a = |\text{número real} - \text{número aproximado}|}$$

Por ejemplo, al redondear el 2,347 obteníamos 2,35, con lo que el error absoluto de esta aproximación sería:

$$E_a = |2{,}347 - 2{,}35| = |-0'003| = 0{,}003$$

9. Error relativo

El error relativo nos da el porcentaje que supone el error absoluto con respecto al número real, y se define como:

$$E_r = Ea \,/\, \text{número real}$$

En el ejemplo anterior, sería:

$E_r = 0{,}003 / 2{,}347 = 0{,}0013$

Si multiplicamos por 100 el error relativo, nos daría el error relativo en %.

0,0013 x 100 = 0,13% de error

10. Notación científica

A veces tenemos que expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas. En esos casos, es cuando nos resulta especialmente útil utilizar potencias de 10. Por ejemplo, ¿sabes cuántas células puede llegar a tener el cuerpo humano? Pues unos cincuenta billones, es decir, 50000000000000.

$50000000000000 = 5 \times 10000000000000 = 5 \times 10^{13}$ células

Esto último es un ejemplo de lo que llamamos **notación científica**. Escribir un número en notación científica es expresarlo como el producto de un número (entero o decimal) en el intervalo [1,10), multiplicado por una potencia de 10.

Veamos algunos ejemplos más:

a) $529000000 = 5{,}29 \cdot 10^{8}$
b) $590000000000 = 5{,}9 \cdot 10^{11}$
c) $0{,}000987 = 9{,}87 \cdot 10^{-4}$
d) $0{,}000000045 = 4{,}5 \cdot 10^{-8}$

Volviendo a las células, sabemos que su tamaño es muy pequeño. Por poner un ejemplo, el diámetro de una célula de la hoja del peral es de 0,0000074 m, que escrito en notación científica sería $7{,}4 \cdot 10^{-6}$ m.

Por ejemplo, la distancia que nos separa de la nebulosa de Andrómeda, es aproximadamente igual a 95000000000000000000 km. Para expresar este número en notación científica, basta con:

1. Escribir las cifras significativas (95), colocando una coma a la derecha de la primera (9,5).

2. Contar las cifras que hay a la derecha del 9 (19 en total), lo que nos dará el exponente al que hay que elevar el 10.

Por lo tanto, en este ejemplo: $95000000000000000000 = 9,5 \cdot 10^{19}$ km

Para escribir en notación científica números muy pequeños, actuamos de forma parecida, sólo que en este caso el exponente del 10 será negativo. Como ejemplo, tomemos el número 0,000987. Para escribirlo en notación científica haremos lo siguiente:

1. Escribir las cifras significativas (987), colocando una coma a la derecha de la primera (9,87).

2. Contar el lugar que ocupa la primera cifra significativa a partir de la coma. Esto nos dará el valor absoluto del exponente (negativo).

Por lo tanto tendremos:

$$0,000987 = 9,87 \cdot 10^{-4}$$

Puede parecer que para expresar un número con notación científica, es necesario que algunas de sus cifras sean ceros y sin embargo lo más habitual es que números muy grandes tengan muchas cifras distintas de cero. ¿Qué haremos? Utilizaremos las aproximaciones de números. Con números muy grandes o muy pequeños es frecuente hacer aproximaciones, despreciando cifras que no son significativas y sustituyéndolas por ceros.

Observa el siguiente ejemplo:

La distancia entre el Sol y la Tierra es 149.597.870.691 metros o 149.597.870,691 kilómetros. Tratándose de millones de kilómetros, cien mil kilómetros más o menos son insignificantes por lo que podemos redondear o aproximar este número y sustituir algunas cifras por ceros. Podríamos decir que la distancia máxima del Sol a la Tierra es aproximadamente 149.600.000 kilómetros (o 149.600.000.000 metros) y si lo queremos expresar con notación científica pondremos $1,496 \cdot 10^8$ Km ($1,496 \cdot 10^{11}$ m)

Para expresar un número con notación científica debemos usar una sola cifra para la parte entera y el resto las pondremos como parte decimal. No es conveniente usar más de 3 cifras decimales. El resto de las cifras decimales se redondean o sustituyen por ceros.

Ejemplos:

1- Expresa con notación científica los siguientes números:

$237000 = 2,37 \cdot 10^5$
$128500000000000 = 1,285 \cdot 10^{14}$
$860000000000000000 = 8,6 \cdot 10^{17}$

2- Expresa con notación decimal:

$3,24 \cdot 10^5 = 3,24 \cdot 100000 = 3240000$
$4,7 \cdot 10^8 = 4,7 \cdot 100000000 = 470.000.000$
$5,859 \cdot 10^6 = 5,859 \cdot 1000.000 = 5.859.000$

3- Expresa con notación científica el número de habitantes que había en el mundo en el año 2005, sabiendo que se contabilizaron 6.525.170.264 habitantes.

Podemos concluir en que había aproximadamente 6.525.000.000 es decir $6{,}525 \cdot 10^9$ habitantes.

11. Operaciones en notación científica

Suma y resta

Debemos distinguir dos casos:

Si las potencias de 10 son iguales

En este caso, sumamos o restamos los números que preceden a las potencias de 10, dejando el 10 elevado al mismo exponente.

Ejemplos: $2 \cdot 10^{-3} + 4{,}9 \cdot 10^{-3} = (2 + 4{,}9) \cdot 10^{-3} = 6{,}9 \cdot 10^{-3}$

$-5 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^6 = (-5 + 7) \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6$

Si las potencias de 10 son distintas

Si son distintas no podemos sumar ni restar directamente, sino que antes tenemos que conseguir que sean iguales. Actuaremos de la siguiente forma: Supongamos que tenemos que realizar la siguiente operación:

$$4{,}2 \cdot 10^4 - 3{,}1 \cdot 10^3$$

1) Reducimos a la potencia de 10 de menor exponente (para ello podemos descomponer en producto la potencia de exponente mayor).

$$4{,}2 \cdot 10^1 \cdot 10^3 - 3{,}1 \cdot 10^3 = 42 \cdot 10^3 - 3{,}1 \cdot 10^3$$

2) Sumamos o restamos los números que van delante de las potencias de 10

$$(42 - 3{,}1) \cdot 10^3 = 38{,}9 \cdot 10^3$$

3) Finalmente, escribimos el resultado correctamente en notación científica

$$38{,}9 \cdot 10^3 = 3{,}89 \cdot 10^4$$

Si los exponentes fueran negativos, el procedimiento es el mismo. Veamos un ejemplo:

$-6{,}1 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot 10^{-2}$

1) $-6{,}1 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-3} = -6{,}1 \cdot 10^{-3} - 70 \cdot 10^{-3}$
2) $(-6{,}1 - 70) \cdot 10^{-3} = -76{,}1 \cdot 10^{-3}$
3) $-76{,}1 \cdot 10^{-3} = -7{,}61 \cdot 10^{-2}$

Multiplicación

Para multiplicar dos números en notación científica, se multiplican los números que preceden a las potencias de 10 y se multiplican también dichas potencias (sumando los exponentes).

Ejemplos:

$(4 \cdot 10^{5}) \cdot (2 \cdot 10^{7}) = (4 \cdot 2) \cdot (10^{5} \cdot 10^{7}) = 8 \cdot 10^{12}$
$(-2 \cdot 10^{-4}) \cdot (7 \cdot 10^{-11}) = (-2 \cdot 7) \cdot (10^{-4} \cdot 10^{-11}) = -14 \cdot 10^{-15}$

En este último ejemplo, tenemos que “arreglar” el resultado para que esté correctamente expresado en notación científica (una sola cifra entera delante de la potencia de 10):

$-14 \cdot 10^{-15} = -1{,}4 \cdot 10^{-14}$

Este último paso, habrá que realizarlo después de cualquier operación, siempre que sea necesario.

División

Para dividir dos números en notación científica, se dividen los números que preceden a las potencias de 10 y también dichas potencias (restando los exponentes).

Ejemplos:

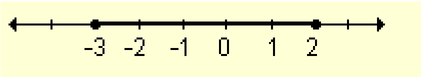
$(4{,}7 \cdot 10^{2}) : (9{,}4 \cdot 10^{6}) = (4{,}7 : 9{,}4) \cdot (10^{2} : 10^{6}) = 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$
$(-1{,}8 \cdot 10^{-11}) : (-3 \cdot 10^{-16}) = (1{,}8 : 3) \cdot (10^{-11} : 10^{-16}) = 0{,}6 \cdot 10^{5} = 6 \cdot 10^{4}$

Como has podido ver, en el último paso de ambos ejemplos hemos tenido que “arreglar” de nuevo el resultado.

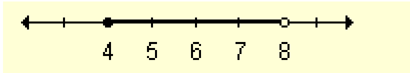
Ejercicios

1. **Escribe como intervalo el conjunto definido sobre la recta real.**

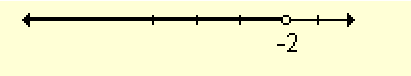
a)



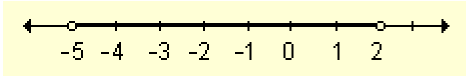
b)



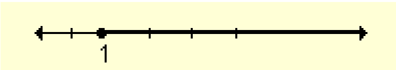
c)



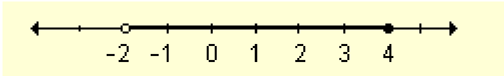
d)



e)



f)



2. Escribe como intervalos…

a) $2 < x$, siendo x un número real

b) $4 \le x < 10$, siendo x un número real

c) $\{x \in R / 2 \le x \le 4\}$

d) $\{x \in R / -3 \le x \le 5\}$

e) $\{x \in R / x \le 5\}$

f) $\{x \in R / 1 < x < 3\}$

g) $\{x \in R / -7 \le x < 3\}$

h) $\{x \in R / x > -1\}$

i) $\{x \in R / x > -2\}$

j) $\{x \in R / x \le \frac{5}{6}\}$

k) $\{x \in R / -2 < x \le \frac{5}{3}\}$

3. Representa en la recta estos intervalos:

a) (3,7)

b) [-2,5]

c) (-4,1)

d) (-∞,0)

e)]1, 5[

f) [-5, -7[

g)]-7, 5]

h)]-∞, 3[

i) $[\frac{-3}{2}, \sqrt{5}]$

4. **Clasificar los siguientes grupos de números en naturales, enteros, racionales, irracionales:**

$$3'030030003\ldots \; ; \; -\sqrt{9} \; ; \; \frac{28}{7} \; ; \; 1+\sqrt{7} \; ; \; 1'8330330330\ldots$$

$$\sqrt{144} \; ; \; \sqrt[3]{-27} \; ; \; -2'242424\ldots \; ; \; 1'1212212221\ldots \; ; \; \sqrt[4]{-1}$$

5. Escribe en forma de intervalo el entorno de centro 3 y radio 0,3.

6. Halla en centro y el radio del entorno que representa el intervalo (-7,3)

7. Estima la longitud de un tramo de calle sabiendo que hay 15 zonas de estacionamiento en fila.

8. Redondea y trunca a las centésimas:

a) 0,999

b) 4,0051

c) 2,7449

d) 77,819

9. Si la relación de cambio entre dólares y euros es 1€ = 1,2313$, calcula cuántos dólares se obtienen al cambiar 500 euros. Redondea el resultado a las centésimas, y calcula el error absoluto y el error relativo.

10. Una mesa rectangular mide 2,45m de longitud y 1,34m de anchura. Halla su área, redondea el resultado a decímetros cuadrados y calcula el error absoluto y relativo cometidos.

11. Indica cuáles de los siguientes números están escritos correctamente en notación científica.
$4,85 \cdot 10^{-9}$
$23,54 \cdot 10^{8}$
$0,41 \cdot 10^{3}$

12. Escribe en notación científica los siguientes números:
a. 0,00003695
b. $36,987 \cdot 10^{9}$
c. 269580000
d. $2,3695 \cdot 10^{5}$

13. Resuelve:
a) $-3 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6} =$
b) $-2,3 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} =$
c) $6 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-2} =$
d) $-9,2 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5} =$
e) $9 \cdot 10^{-7} + 3 \cdot 10^{-7} =$
f) $(-7,4 \cdot 10^{-2}) \cdot (-8 \cdot 10^{13}) =$
g) $(-3,48 \cdot 10^{-11}) : (-5,8 \cdot 10^{8}) =$
h) $(4,97 \cdot 10^{19}) : (-7 \cdot 10^{13}) =$
i) $(2,8 \cdot 10^{12}) : (4 \cdot 10^{6}) =$
j) $(-6 \cdot 10^{9}) \cdot (-6,7 \cdot 10^{-11}) =$
k) $3,24 \cdot 10^{5} + 2,369 \cdot 10^{3} - 5,87 \cdot 10^{7} =$
l) $2,65 \cdot 10^{6} - 9,698 \cdot 10^{9} + 3,17 \cdot 10^{7} =$
m) $2,65 \cdot 10^{-6} - 2,36 \cdot 10^{-5} + 3,5 \cdot 10^{-7} =$
n) $2,36 \cdot 10^{5} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} =$
o) $3,11 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-2} =$
p) $1,1076 \cdot 10^{6} : 2,13 \cdot 10^{7} =$
q) $1,3708 \cdot 10^{9} : 2,3 \cdot 10^{-3} =$