Bloque 1. Aritmética y Álgebra

3. Los números racionales

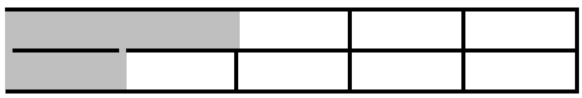
1. Los números racionales o fraccionarios

Fracción es una o varias partes iguales en que dividimos la unidad. Las fracciones representan siempre una cierta parte de "algo". Ese "algo" es la unidad que elegimos.

Una fracción es un par de números naturales a y b en la forma

$$\frac{a}{b}$$

El número de abajo se llama **denominador** e indica las partes iguales en que dividimos la unidad. El número de arriba se llama **numerador** e indica las partes que cogemos.



La figura se ha dividido en 10 partes de las que 3 están sombreadas y siete no.

La fracción de figura sombreada es $\frac{3}{10}$

La fracción de figura no sombreada $\frac{7}{10}$

¡Ojo! No podemos dividir por cero, luego el denominador de una fracción nunca puede ser cero.

Para leer una fracción se dice primero el numerador y después el denominador.Cuando el denominador es mayor de 11, se le añade la terminación **avo**.

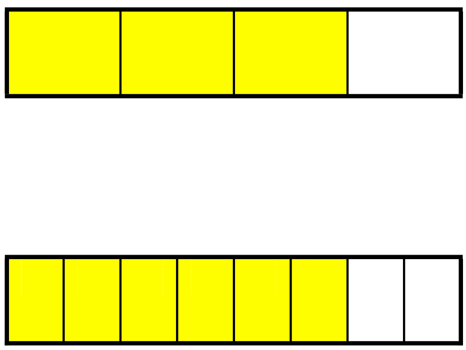
Ejemplos de lectura de fracciones:

$\frac{3}{2} \rightarrow$ tres medios	$\frac{5}{8} \rightarrow$ cinco octavos
$\frac{4}{3} \rightarrow$ cuatro tercios	$\frac{2}{9} \rightarrow$ dos novenos
$\frac{6}{5} \rightarrow$ seis quintos	$\frac{3}{10} \rightarrow$ tres décimos
$\frac{1}{6} \rightarrow$ un sexto	$\frac{4}{15} \rightarrow$ cuatro quince**avos**
$\frac{2}{7} \rightarrow$ dos séptimos	$\frac{5}{24} \rightarrow$ cinco veinticuatro**avos**

2. Fracciones equivalentes, fracciones amplificadas y fracciones simplificadas

Dos **fracciones son equivalentes** cuando escritas de distintas maneras tienen el mismo resultado.

Veámoslo con un gráfico:



$\frac{3}{4}$

$\frac{6}{8}$

Para comprobar que dos fracciones son equivalentes, basta con multiplicar en cruz y observar que el resultado obtenido es el mismo.

Para multiplicar en cruz se opera de la siguiente manera: numerador de la primera fracción por denominador de la segunda fracción y denominador de la primera fracción por numerador de la segunda.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \ son\ equivalentes\ si\ 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y del denominador por el mismo número. Si obtenemos fracciones equivalentes mediante multiplicaciones, se denominan **fracciones amplificadas**:

Ejemplos:

$a)\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}$	$b)\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 8}{6\cdot 8}=\frac{40}{48}$	$c)5=\frac{5}{1}=\frac{5\cdot 2}{1\cdot 2}=\frac{10}{2}$

Si obtenemos fracciones equivalentes mediante divisiones, se denominan **fracciones simplificadas**:

Ejemplos:

$a)\frac{12}{24}=\frac{12:2}{24:2}=\frac{6}{12}$	$b)\frac{6}{12}=\frac{6:3}{12:3}=\frac{2}{4}$

Además se cumple que:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{y} \quad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$$

En general, decimos que un número racional es una fracción y todas las que son equivalentes a ella. El conjunto de los números racionales se representa con la letra **Q**.

IMPORTANTE: Todos los números enteros (y por tanto también los naturales), se consideran números racionales, puesto que se pueden representar en forma de fracción.

Ejemplo: $-2=\frac{-2}{1}$

3. Simplificación de fracciones y fracción irreducible

Simplificar una fracción es convertirla en otra equivalente cuyos términos sean números más pequeños.

Para simplificar se divide el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número que sea divisor de ambos. Cuando una fracción no se puede simplificar más se dice que es **irreducible** y sus términos son primos entre sí.

Para obtener la fracción irreducible, basta con seguir el siguiente proceso:

a) *Se descompone en factores primos el numerador*

b) *Se descompone en factores primos el denominador*

c) *Se escribe la fracción de nuevo, siendo el numerador el producto de sus factores primos, y el denominador también el producto de sus factores primos.*

d) *Eliminamos aquellos factores primos que se repiten en numerador y denominador*

e) *Multiplicamos ahora los factores primos que queden en el numerador, y ese será el numerador de la fracción irreducible. Si no hubiera ningún factor, el numerador sería 1.*

f) *Multiplicamos ahora los factores primos que queden en el denominador, y ese será el denominador de la fracción irreducible. Si no hubiera ningún factor, el denominador sería 1.*

Veamos un ejemplo de obtención de la fracción irreducible con la fracción **420/126**:

a) Se descompone en factores primos el numerador

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

420 = 2 x 2 x 3 x 5 x 7

b) Se descompone en factores primos el denominador

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

126 = 2 x 3 x 3 x 7

c) Ahora escribimos de nuevo la fracción, siendo el numerador el producto de los factores primos de 420 y el denominador el producto de los factores primos de 126.

$$\frac{2\ x\ 2\ x\ 3\ x\ 5\ x\ 7}{2\ x\ 3\ x\ 3\ x\ 7}$$

d) Eliminamos aquellos factores primos que se repiten en numerador y denominador, que en este caso, están marcados en negrita:

$$\frac{\mathbf{2}\ x\ 2\ x\ \mathbf{3}\ x\ 5\ x\ \mathbf{7}}{\mathbf{2}\ x\ \mathbf{3}\ x\ 3\ x\ \mathbf{7}}$$

Luego nos queda la siguiente fracción:

$$\frac{2\ x\ 5}{3}$$

e) Multiplicamos ahora los factores primos que queden en el numerador, y ese será el numerador de la fracción irreducible, luego el numerador será 2 x 5 = 10

f) Multiplicamos ahora los factores primos que queden en el denominador, y ese será el denominador de la fracción irreducible: cómo sólo queda el 3, ese será el denominador.

Por tanto, la fracción irreducible es $\mathbf{\frac{10}{3}}$

4. Reducción de fracciones a un denominador común

Para expresar varias fracciones con el mismo denominador vamos a utilizar el método del mínimo común múltiplo (m.c.m.). Para ello seguiremos estos pasos:

1. Se halla el m.c.m. de los denominadores.
2. Se coloca el m.c.m. como denominador común a todas ellas.
3. Para hallar el numerador de cada fracción se divide el m.c.m. por el denominador que tenía la fracción y el cociente obtenido se multiplca por el numerador.

Ejemplo: Vamos a reducir a común denominador las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$.

Solución: Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

m.c.m. (3,6,4) = 12; que será el nuevo denominador de todas ellas,

y calculamos los numeradores:

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{12:3.2}{12} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{5}{6} \rightarrow \frac{12:6.5}{12} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{12:4.3}{12} = \frac{9}{12}$$

5. Comparación de fracciones

Vamos a distinguir tres tipos de fracciones:

1. **De igual numerador**. Es mayor la fracción que tenga el numerador mayor.
2. **De distinto denominador**. En este caso se reducen las fracciones a común denominador y aplicamos el criterio anterior.

6. Suma y resta de números racionales

Para sumar o restar números racionales, estos han de tener el mismo denominador. Por tanto, hay que transformar estas fracciones en otras equivalentes cuyo denominador sea el mismo. Realizamos los cálculos necesarios, tal y como hemos visto anteriormente:

Ejemplos:

$$a)\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{7\cdot 3}{12}+\frac{5\cdot 2}{12}=\frac{21}{12}+\frac{10}{12}=\frac{31}{12} \qquad b)\ \frac{8}{21}-\frac{4}{12}=\frac{8\cdot 4}{84}-\frac{4\cdot 7}{84}=\frac{32}{84}-\frac{28}{84}=\frac{4}{84}$$

Ejemplo:

$$2+\frac{1}{3}=\frac{2}{1}+\frac{1}{3}=\frac{3:1.2}{3}+\frac{3:3.1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

7. Multiplicación de números racionales

Para multiplicar números racionales se halla un nuevo número racional cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

En general: $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\begin{cases}\text{numerador: producto de los numeradores}\\ \text{denominador: producto de denominadores}\end{cases}$$

Ejemplo:

$$a)\frac{3}{5}.\frac{2}{7}=\frac{6}{35} \qquad b)\frac{2}{3}.\frac{5}{6}.\frac{3}{7}=\frac{30}{126} \qquad c)\frac{-3}{2}.\frac{5}{2}=\frac{-15}{4}$$

<u>Caso particular:</u> Para multiplicar un número entero por un número racional, multiplicaremos el entero por el numerador del número racional y dejaremos el denominador como está.

En realidad escribimos el número entero en forma de fracción, con denominador 1 y realizamos la multiplicación:

$$4.\frac{3}{5}=\frac{4}{1}.\frac{3}{5}=\frac{4.3}{1.5}=\frac{12}{5}$$

Ejemplo: Si queremos realizar la siguiente multiplicación $\frac{24}{81}.\frac{45}{16}$, será conveniente descomponer en factores los números que aparecen en el numerador y denominador:

24 = 2.2.2.3; 45 = 3.3.5; 81 = 3.3.3.3; 16 = 2.2.2.2

$$\frac{24}{81}.\frac{45}{16}=\frac{24.45}{81.16}=\frac{(2.2.2.3).(3.3.5)}{(3.3.3.3).(2.2.2.2)}$$

Ahora podemos tachar los factores que están repetidos en el numerador y el denominador:

$$\frac{\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{3}.\cancel{3}.\cancel{3}.5}{3.\cancel{3}.\cancel{3}.\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}.2}=\frac{5}{3.2}=\frac{5}{6}$$

8. Números inversos

Dada una fracción, $\frac{a}{b}$, decimos que la fracción $\frac{b}{a}$ es su fracción inversa porque al multiplicarlas se obtiene la unidad: $\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=\frac{a.b}{b.a}=1$. Por ello, para escribir el inverso de una fracción se cambia el numerador por el denominador y viceversa.

9. División de números racionales

Para dividir dos números racionales se multiplica en cruz.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\begin{cases}\text{numerador: producto de numerador de la 1ª por denominador de la 2ª}\\ \text{denominador: producto de denominador de la 1ª por numerador de la 2ª}\end{cases}$$

Ejemplos:

$a)\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}$ $b)\frac{2}{3}:\frac{5}{6}:\frac{1}{7}=\frac{12}{15}:\frac{1}{7}=\frac{84}{15}$ $c)\frac{4}{9}:5=\frac{4}{9}:\frac{5}{1}=\frac{4}{45}$ $d)\frac{-3}{2}:\frac{5}{2}=\frac{-6}{10}$

10. Operaciones combinadas.

En operaciones combinadas, la jerarquía es la misma que la empleada para números enteros o naturales. Primero resolvemos los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha y por último las sumas y restas en el orden en que estén escritas. La fracción que resulte se simplificará siempre que sea posible.

Ejemplos:

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{6}{10}+\frac{21}{10}=\frac{27}{10} \quad \text{Primero hacemos las multiplicaciones y divisiones. Luego la suma.}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}:\frac{5}{6}:\frac{1}{7}=\frac{1}{3}-\frac{12}{15}:\frac{1}{7}=\frac{1}{3}-\frac{84}{15}=\frac{5}{15}-\frac{84}{15}=\frac{-79}{15} \quad \text{Primero hacemos las divisiones, luego la resta.}$$

$$\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{10}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{10}+\frac{3}{10}\right)-\left(\frac{8}{12}-\frac{3}{12}\right)=\frac{11}{10}-\frac{5}{12}=\frac{66}{60}-\frac{25}{60}=\frac{41}{60}\left\{\begin{array}{l}\text{primero los parénteis}\\ \text{segundo la resta}\end{array}\right.$$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{9}:5=\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{9}:\frac{5}{1}=\frac{9}{6}-\frac{4}{45}=\frac{15}{90}-\frac{8}{90}=\frac{7}{90}\left\{\begin{array}{l}\text{Primero el paréntesis y la división.}\\ \text{Último la resta.}\end{array}\right.$$

$$4-3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=4-3\left(\frac{10}{15}-\frac{3}{15}\right)=4-3\left(\frac{7}{15}\right)=4-\frac{21}{15}=\frac{60}{15}-\frac{21}{15}=\frac{39}{15}\left\{\begin{array}{l}\text{Primero el paréntesis}\\ \text{Multiplicación}\\ \text{Por último la resta.}\end{array}\right.$$

11. Los números decimales

Las fracciones que tienen por denominador la unidad seguida de ceros se llaman **fracciones decimales**.

Si el denominador es diez, la fracción se lee nombrando el numerador seguido de la palabra décimos o décimas.

$$\frac{3}{10}=tres\ décimos$$

Si el denominador es cien, la fracción se lee nombrando el numerador seguido de la palabra centésimos o centésimas.

$$\frac{7}{100}=siete\ centésimas$$

11. Expresión decimal de los números racionales

Consiste en realizar la división con decimales de numerador entre denominador (hasta que el resto sea cero). Ejemplo: 2/4 = 2:4 = 0,5

La coma se puede colocar abajo o arriba; es decir, la podrás ver así 5,6 y así 5'6.

Los números obtenidos tienen una **parte entera** y otra **parte decimal** y se llaman **números decimales**. La parte entera está a la izquierda de la coma y la parte decimal, a la derecha.

Para leer un número decimal se dice primero la parte entera, seguida de la palabra "unidades" o "enteros" y después se lee la parte decimal acabando con el nombre del lugar que corresponde a la última cifra decimal.

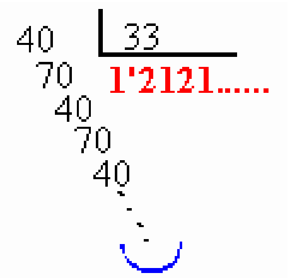
28,64 ⇒ veintiocho unidades y sesenta y cuatro centésimas

Si quieres escribir cualquier número decimal, por ejemplo 58 milésimas, tienes que colocar el 8 en el lugar de las milésimas. Por lo tanto el 5 estará en el lugar de las centésimas. Deberás colocar 0 en el lugar de las décimas y otro 0 en el de las unidades. Es decir, quedará así: 0,058.

A la derecha de un número decimal no se deben añadir ceros, puesto que su valor no varía. Por tanto, 3,45 = 3,450 = 3,45000

12. Números decimales periódicos

Puede ocurrir que al escribir una fracción en forma decimal no se obtenga nunca resto cero en la división, es decir, no se obtenga un decimal exacto. *Ejemplo: la fracción cuarenta treintaitresavos.*



El cociente es 1,21212121…, un número decimal con infinitas cifras decimales que se repiten indefinidamente. A estos números se les llama **decimales periódicos** y a la cifra o conjunto de cifras que se repiten se les llama **período**.

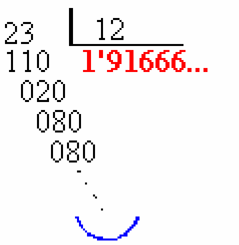
Este número se puede expresar así: $1,\widehat{21}$

El arco encima del 21 indica que está cifra se repite de forma indefinida.

Cuando en un número decimal el período empieza justo detrás de la coma, se dice que el decimal es **periódico puro**.

Hay números en los que el período empieza justo detrás de la coma y otros en los que hay alguna cifra entre la coma y el período.

Ejemplo



Es decir, expresado como número periódico sería $1,91\widehat{6}$

Si entre la coma y el período hay una o varias cifras decimales, el decimal se llama **periódico mixto**. A las cifras que hay entre la coma y el período se les llama **anteperíodo**.

13. Potenciación de fracciones

Una potencia de una fracción equivale a la potencia del numerador y el denominador elevada al mismo exponente.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{2^3}{4^3} = \frac{8}{64} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Si el exponente es negativo, entonces equivale a la fracción inversa pero con ese exponente en positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Si tenemos producto de potencias de fracciones con la misma base, el resultado es una potencia donde la base será la fracción y el exponente la suma de los exponentes. Mientras que si tenemos un cociente de potencias de fracciones con la misma base, el resultado es una potencia donde la base será la fracción y el exponente la resta de los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} : \left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Si tenemos una potencia de otra potencia donde la base es una fracción, el resultado es una fracción con la misma base (la fracción) y exponente el producto de los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

14. Castillos de fracciones

A veces, es posible expresar dentro del numerador y/o el denominador de una fracción, otra fracción, o incluso, operaciones matemáticas que incluyan varias fracciones. En este caso, estamos ante un castillo de fracciones, como el que se muestra en el siguiente ejemplo:

$$2 - \frac{3 - \frac{2}{5}}{4 - 3 \cdot \frac{4}{5}}$$

Para resolver los castillos de fracciones, hay que ir resolviendo las operaciones conforme a la jerarquía establecida, de forma que se vayan eliminando primero en la medida de lo posible las fracciones cuya línea de separación entre numerador y denominador sea más pequeña.

Ejercicios

1. Contesta a estas cuestiones:

1) $\frac{1}{3}$ es igual que	a) $\frac{1}{6}$	b) $\frac{2}{6}$	c) $\frac{3}{6}$
2) $\frac{2}{5}$ es igual que	a) $\frac{4}{10}$	b) $\frac{2}{10}$	c) $\frac{6}{10}$
3) $\frac{4}{7}$ es igual que	a) $\frac{8}{7}$	b) $\frac{4}{14}$	c) $\frac{8}{14}$
4) $\frac{2}{4}$ es igual que	a) $\frac{2}{8}$	b) $\frac{1}{2}$	c) $\frac{1}{8}$

[Soluciones: b, a, c, b]

2. Calcula la fracción irreducible de:

1) $\frac{18}{72} =$
2) $\frac{60}{90} =$
3) $\frac{36}{48} =$
4) $\frac{10}{6} =$

[Soluciones: $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ y $\frac{5}{3}$***]***

3. Realiza las siguientes sumas y restas:

1) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{8} =$
2) $\frac{1}{2} + \frac{7}{6} - \frac{3}{5} =$
3) $\frac{10}{7} + \frac{8}{16} + \frac{-7}{2} =$
4) $\frac{1}{8} + \frac{5}{3} - \frac{3}{5} =$

[Soluciones: $\frac{29}{40}, \frac{16}{15}, \frac{-11}{7}$ y $\frac{143}{120}$***]***

4. Realiza las multiplicaciones descomponiendo en factores:

1) $\frac{45}{21} \bullet \frac{49}{20} =$
2) $\frac{90}{49} \bullet \frac{77}{30} =$
3) $\frac{12}{75} \bullet \frac{91}{30} =$
4) $\frac{39}{70} \bullet \frac{38}{65} \bullet \frac{40}{93} =$

[Soluciones:** $\frac{21}{4}, \frac{33}{7}, \frac{91}{225}$ y $\frac{152}{1085}$**]

5. Realiza las siguientes operaciones:

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} * \frac{10}{3} =$
2) $5 + \frac{2}{7} =$
3) $\frac{2}{7} * \frac{-3}{2} + \frac{7}{2} * \frac{3}{5} =$
4) $\frac{8}{3} * \frac{2}{5} - 10 + \frac{5}{2} * \frac{3}{10} =$

[Soluciones:** $1, \frac{37}{7}, \frac{-117}{70}$ y $\frac{-491}{60}$**]

6. Indica el periodo de las divisiones y si son periódicos puros o mixtos:

1) $\frac{30}{9} =$
2) $\frac{77}{3} =$
3) $\frac{227}{6} =$
4) $\frac{225}{11} =$

[Soluciones:** $puro, puro, mixto$ y $puro$**]

7. Resuelve los siguientes castillos de fracciones:

1) $$\frac{1-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)+\frac{7}{2}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=$$

2) $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=$$

3) $$\frac{\frac{5}{1+\frac{1}{2}}-\frac{2}{9}}{\frac{4}{1+\frac{1}{2}}+\frac{12}{1+\frac{1}{2}}}=$$

4) $$\frac{\dfrac{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{9}{4}}{\frac{3}{5}}}{\dfrac{\frac{2}{4}}{\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{3}\cdot\frac{3}{21}}}=$$

8. Realiza las siguientes operaciones con potencias:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

k) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} =$

l) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4} =$

m) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

9. Efectúa:

a) $$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{2}\left(\frac{8}{27}\right)^{3}} =$$

b) $$\frac{\left(2-\frac{1}{5}\right)^{2}}{\left(3-\frac{2}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{7}:\frac{1}{2}\right)^{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\right)} - 5\,\frac{1}{7} =$$

c) $\frac{2}{3}:\left[5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left[\left(\frac{1}{2}-1\right):2\frac{1}{2}\right]=$

e) $\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$