

Tema 3. Trigonometría

ÍNDICE

- 1) ¿Qué es la trigonometría?
 - 2) Conceptos previos.
 - 3) Razones trigonométricas de un ángulo agudo.
 - 4) Relaciones trigonométricas fundamentales.
 - 5) Relaciones trigonométricas de 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 180° y 270°
 - 6) Resolución de triángulos rectángulos.
 - 7) Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
 - 7.1. Reducción de ángulos del segundo cuadrante al primero.
 - 7.2. Reducción de ángulos del tercer cuadrante al primero.
 - 7.3. Reducción de ángulos del cuarto cuadrante al primero.
 - 8) Aplicaciones de la Trigonometría.
-

1) ¿Qué es la trigonometría?

Etimológicamente **trigonometría** significa medición de triángulos. Su objetivo es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de los lados de un triángulo con las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

Los primeros escritos relacionados con ella que aparecen en la historia se remontan a la época babilónica de la que se conservan unas tablillas con mediciones de lados y ángulos de triángulos rectángulos. La trigonometría se aplica desde sus orígenes en agrimensura, navegación y astronomía ya que permite calcular distancias que serían imposibles de obtener por medición directa.

En este tema estudiarás las primeras definiciones trigonométricas y conocerás algunas de sus aplicaciones.



Imagen 1: Tabla babilónica.

https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa#/media/File:Plimpton_322.jpg

Autor: Desconocido Licencia: Creative Commons

Para conocer más sobre la [HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA](#). Puedes realizar la siguiente lectura buscando en el enlace. Después, intenta responder a las preguntas.

Si has leído el texto puedes responder a las siguientes cuestiones:

- 1.- ¿Qué es el sistema de numeración sexagesimal?
- 2.- ¿Qué utilidades se dio a la trigonometría en Babilonia y en el Antiguo Egipto?
- 3.- En la actualidad, ¿qué países forman la antigua Mesopotamia?
- 4.- En el texto se nos habla de que los egipcios necesitaban medir los campos tras la inundación anual. ¿En qué consiste ese fenómeno? ¿De qué río se trata?
- 5.- En la India, la función seno se concebía no como una proporción sino como la longitud del cateto opuesto a un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. ¿Qué dificultades presenta esta definición para el cálculo de una tabla con los valores del seno?

2) Conceptos previos

A) TRIÁNGULOS:

En un triángulo, los vértices se nombran con letras mayúsculas (A, B y C). Los lados se nombran con la letra minúscula del vértice opuesto al lado (a, b, c). Los ángulos se nombran con el acento circunflejo encima de la letra mayúscula que denota el vértice del ángulo ($\hat{A}$). Observa el siguiente dibujo donde te quedará más claro la nomenclatura de los triángulos:

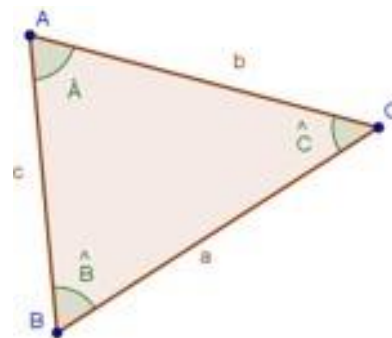
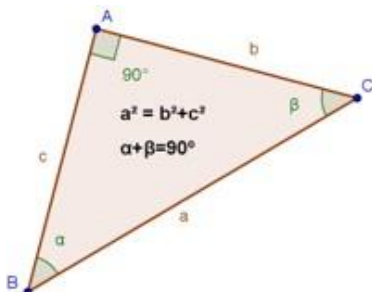


Imagen 2: Cómo se nombra un triángulo.
Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida



En un triángulo rectángulo, al ángulo recto se le asigna la letra A y así, a la hipotenusa la letra a minúscula, siendo b y c los dos catetos. Se utilizan las letras griegas α y β para nombrar a los ángulos agudos que no corresponden al de 90° respectivamente.

En un triángulo rectángulo se verifica el **teorema de Pitágoras** (El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. $a^2 = b^2 + c^2$). También se cumple que los dos ángulos agudos son complementarios, es decir, se cumple que $(\alpha + \beta = 90^\circ)$.

Imagen 3: Cómo se nombra un triángulo.

Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida

B) ÁNGULOS Y SU MEDIDA:

Consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio la unidad.

El punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será POSITIVO y si es igual, NEGATIVO.

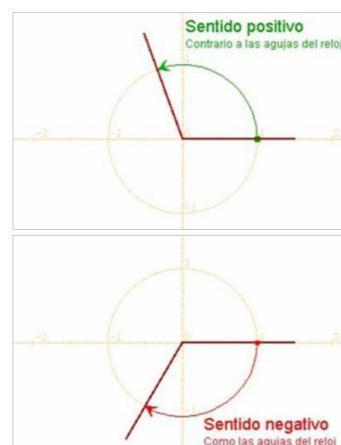


Imagen 4: Sentidos de los ángulos.

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/trigonometria/index4_7.htm

Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.

C) GRADOS SEXAGESIMALES:

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos. Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos. Así un ángulo se mide en: grados° minutos' segundos" → UNA VUELTA COMPLETA= 360°; 1° = 60' y 1' = 60"

D) SISTEMA INTERNACIONAL:

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia. Como la longitud de toda la circunferencia es $2 \cdot \pi \cdot \text{radio}$, resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio.

En el sistema internacional, la unidad de medida de ángulos es el **radián**. El radián es un ángulo tal que, cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por rad.

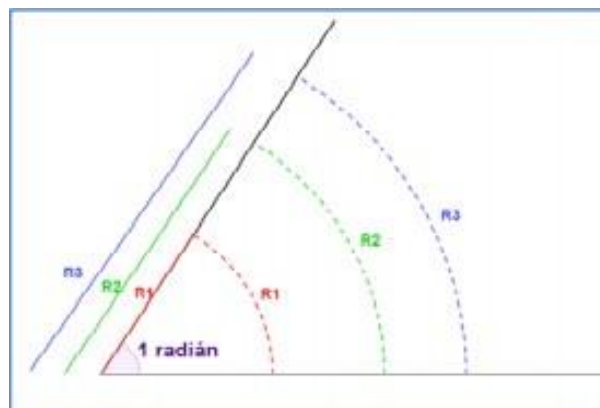
A un ángulo completo le corresponde un arco de longitud $2\pi R$, a un radián un arco de longitud R , entonces:

$$\text{Nº de radianes de un ángulo completo} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

Imagen 5: Radián

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/BC1%2004%20Trigonometria.pdf>

Autor: Desconocido Licencia: Desconocida



E) PASO DE RADIANTES A GRADOS Y DE GRADOS A RADIANTES:

El semiperímetro de la semicircunferencia es $\pi \cdot \text{radio} \rightarrow \pi$ radianes = 180 grados.

Por tanto, únicamente debemos tener presente que:

1 grado

 =

$\frac{\pi}{180}$ radianes

De grados a radianes:

✓ multiplicamos por $\frac{\pi}{180}$

1 radián

 =

$\frac{180}{\pi}$ grados

De radianes a grados:

✓ multiplicamos por $\frac{180}{\pi}$

Imagen 6: Paso de radianes a grados y viceversa.
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/trigonometria/index4_7.htmAutor:
 Desconocido Licencia: Desconocida.

Ejercicio 1

1. Un radián es....

	a) Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide lo mismo que el radio usado para trazarlo
	b) Es la unidad de medida del sistema internacional y es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide el doble del radio usado para trazarlo
	c) Es la unidad de medida de ángulos en el mundo anglosajón

Ejercicio 2

2. Pasa a radianes o grados según corresponda:

- a) 225° b) $\frac{5\pi}{4}$ c) 330° d) $\frac{8\pi}{9}$

Importante

En las calculadoras usuales suelen aparecer cuatro tipos de medida de ángulos:

- "DEG" o expresión en grados sexagesimales;
- la tecla $<^\circ ' ''>$ da los grados enteros del ángulo y la parte decimal se cuenta en minutos (1/60 de grado) y segundos (1/60 de minuto).
- "RAD" es decir, radianes.

- "GRAD" cada grado centesimal es la centésima parte del ángulo recto, toda la circunferencia está formada por 400 grados centesimales. $1\text{GRAD}=90/100\text{ DEG}$

DEBES TENER MUCHO CUIDADO PORQUE SEGÚN EN QUÉ MODO TENGAS TU CALCULADORA LOS CÁLCULOS TE LOS HARÁ CORRECTAMENTE O NO EN LAS UNIDADES QUE NECESITES.

Ejercicio 3

Transforma estas medidas a segundos:

a) $21^\circ 10' 32''$

c) $12^\circ 50' 40''$

b) $15^\circ 40''$

d) $33^\circ 33' 33''$

Ejercicio 4

Transforma estas medidas a forma compleja:

a) $450''$

c) $4500''$

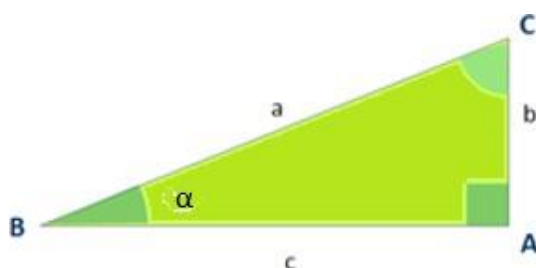
b) $58' 140''$

d) $1^\circ 2000''$

3) Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Empecemos por considerar un ángulo agudo cualquiera, utilizaremos una letra griega α (alfa) para denotarlo. Es siempre posible construir un triángulo rectángulo de modo que α sea uno de sus ángulos.

Sea $\triangle ABC$ uno de estos triángulos y situemos en el vértice B, el ángulo α . Se definen las razones trigonométricas directas del ángulo α : seno, coseno y tangente como:



$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \text{cos } \alpha = \text{cos } \hat{B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tan } \alpha = \text{tan } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

Imagen 6: Triángulo rectángulo

<http://apuntesmareaverde.org.es/>

grupos/mat/4B/08_Trigonometria.pdf

Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida

También se utilizan las expresiones $\operatorname{tg} \alpha$ y $\operatorname{tag} \alpha$ como símbolos de la tangente de α .

Ejercicio 5

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ cuyos catetos miden $b = 30$ cm y $c = 40$ cm.

Ejercicio 6

La tangente de un ángulo se define como...

a) El cateto opuesto entre cateto adyacente
b) Cateto opuesto entre hipotenusa
c) Cateto adyacente entre cateto opuesto
d) Hipotenusa entre cateto adyacente

Ejercicio 7

Halla las razones trigonométricas de los ángulos de los siguientes triángulos rectángulos:

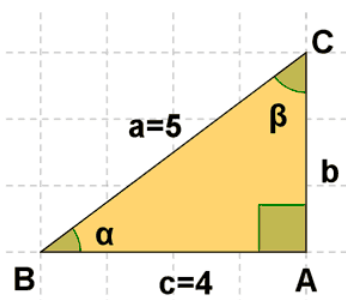


Imagen 6b: Triángulo rectángulo.
http://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/trigonometria/problemas/p_razones.html
 Autor: Desconocido Licencia: desconocida

4) Relaciones trigonométricas fundamentales

Si conocemos una de las razones trigonométricas del ángulo α , es posible calcular las razones trigonométricas restantes, gracias a las dos relaciones trigonométricas fundamentales siguientes:

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

que también verás escrita como $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ dado que las potencias de las razones trigonométricas suelen escribirse con su exponente sobre la última letra de su notación y a continuación el nombre del ángulo.

Ejercicio 8

Calcula el resto de las razones trigonométricas de un ángulo dado α , sabiendo que el $\operatorname{cos} \alpha = 0,939$ y que el ángulo pertenece al primer cuadrante.

Ejercicio 9

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α situado en el segundo cuadrante sabiendo que el $\operatorname{cos} \alpha = -1/4$

Ejercicio 10

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α situado en el tercer cuadrante sabiendo que la $\text{tg } \alpha = 4/3$

5) Razones trigonométricas de 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 180° y 270°

	Seno	Coseno	Tangente
0°	0	1	0
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞
180°	0	-1	0
270°	-1	0	∞

El saber las razones trigonométricas de los conocidos como ángulos notables, nos será útil cuando necesitemos calcular las razones de otro ángulo que pueda reducirse a alguno de éstos. Este tipo de ejercicio los veremos en el apartado 7 del tema.

6) Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es calcular las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados. En el caso de que el triángulo sea rectángulo podemos considerar tres casos dependiendo de las hipótesis o datos iniciales. En cada uno de ellos existen varias formas de obtener la solución. Vamos a describir una en cada caso:

• PRIMER CASO: Se conoce la hipotenusa (h) y uno de los ángulos (α).

Como estamos con un triángulo RECTÁNGULO, en realidad conocemos dos de los ángulos. Por tanto, el tercer ángulo lo obtenemos restando; ya que sabemos que en cualquier triángulo las sumas de sus tres ángulos debe ser 180° .

$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \beta = 180 - 90 - \alpha$$

A partir de ahora, nos faltaría conocer el valor de los dos catetos. Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \text{cos } \alpha = \text{cos } \hat{B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tan } \alpha = \text{tan } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

Imagen 7: Razones trigonométricas

<http://apuntesmareaverde.org.es>

/grupos/mat/4B/

08_Trigonometria.pdf

Autor: Desconocido. Licencia:

Desconocida

• **SEGUNDO CASO: Se conoce uno de los ángulos y un cateto.**

En este caso nos ocurre lo mismo que en el anterior; es decir, realmente conocemos dos ángulos y el que nos falta lo podemos calcular restando a 180° . De la misma forma procederemos para calcular la hipotenusa y el otro cateto.

• **TERCER CASO: Se conoce dos lados del triángulo.**

En este caso utilizaremos en primer lugar el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado, tanto si el que falta es un cateto como si es la hipotenusa. $\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Para obtener el primero de los ángulos agudos, calcularemos en primer lugar una de sus razones trigonométricas a partir de las definiciones que ya conocemos. Pero una vez obtenido el valor de una de las tres razones trigonométricas: seno, coseno o tangente, para conocer el valor del ángulo debemos utilizar la calculadora. Si lo que hemos calculado suponemos que es el SENO, a la hora de escribir este paso en el papel lo despejamos escribiendo: **arcsen 0,...**, que se lee “arco seno de cero coma....” y que significa “ángulo cuyo seno es cero coma ...” y que se obtiene con la calculadora activando el comando $\sin^{-1}$ lo que conseguiremos con la secuencia: SHIFT + $\sin^{-1}$ + 0,...

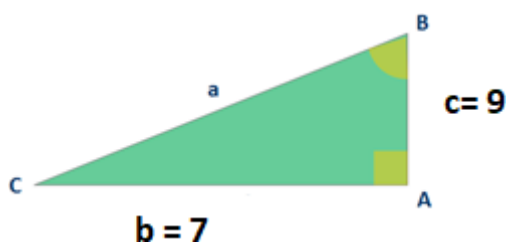


Imagen 8: Comandos calculadora para obtener arcoseno

Fuente: Propia

De forma análoga lo haríamos si lo que hubiésemos obtenido fuera el coseno o la tangente. De todas formas recuerda que no todas las calculadoras funcionan igual, puede ocurrir que la que tu uses no funcione de la misma manera, tendrás que mirar sus instrucciones para asegurarte.

Ejercicio 11



Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

Imagen 9: Triángulo rectángulo para resolver.
Autor: Propia

Ejercicio 12

En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa $a = 5\text{ m}$ y un cateto $b = 4\text{ m}$. Resuelve el triángulo.

Ejercicio 13

En un triángulo rectángulo se conoce el cateto $c = 42\text{ m}$ y su ángulo opuesto $C = 31^\circ$. Resuelve el triángulo.

7) Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Se llama **circunferencia goniométrica** a una circunferencia de radio 1 y con centro en el origen de un sistema de ejes coordenados.

A cada uno de los cuartos en que los ejes dividen la circunferencia se les llama **cuadrante**.

Si el ángulo es agudo, el punto está en el 1^{er} cuadrante, si el ángulo es obtuso estará en el 2^o cuadrante, si el ángulo está entre 180° y 270° en el 3^{er} cuadrante y si el ángulo está entre 270° y 360° , el punto estará en el 4^o cuadrante:

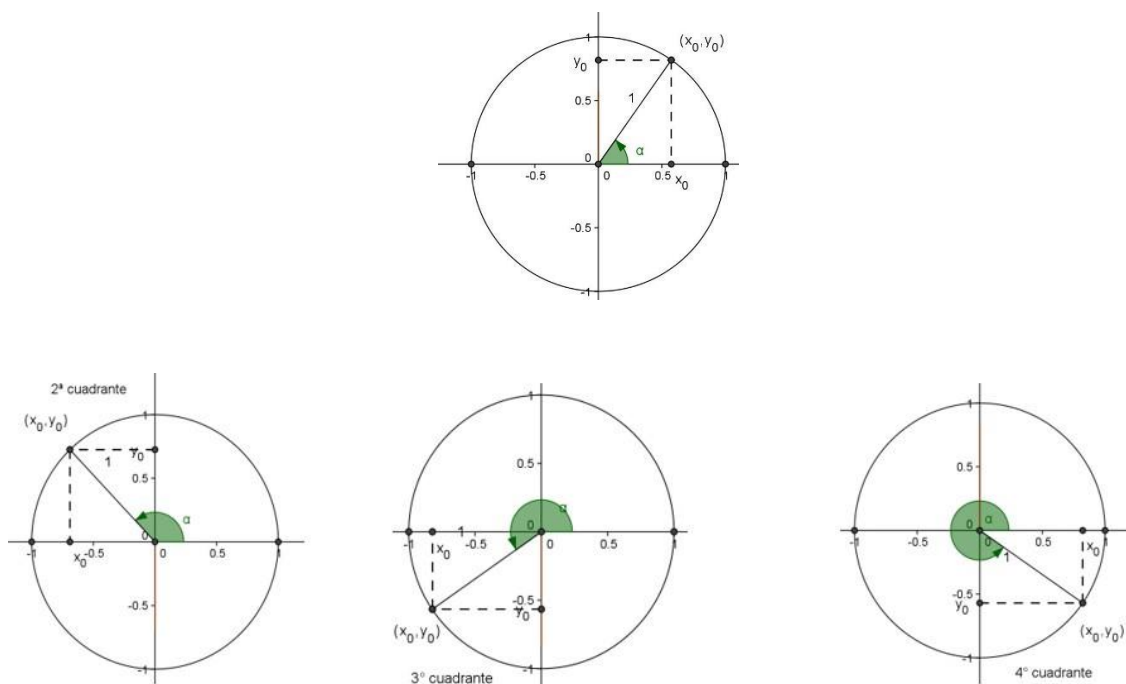


Imagen 8: Cuadrantes en la circunferencia goniométrica.
Fuente: Desconocida. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Los ángulos α de los cuadrantes segundo, tercero o cuarto pueden relacionarse con ángulos agudos α que podemos situar en el primer cuadrante y que tienen razones trigonométricas con los mismos valores absolutos que los ángulos iniciales.

Si consideramos el triángulo rectángulo siguiente y aplicamos la definición de seno, coseno y tangente:

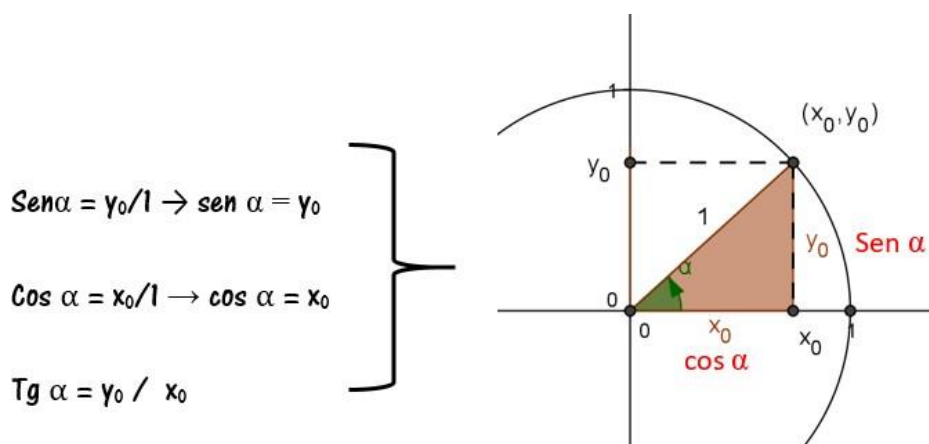
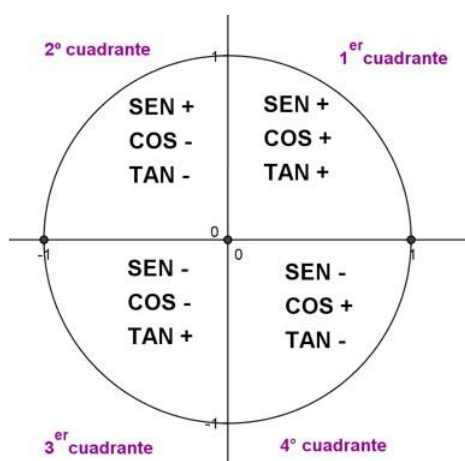


Imagen 9: Ángulo del primer cuadrante y sus razones trigonométricas.

Fuente: Propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Teniendo en cuenta que el seno es la segunda coordenada y el coseno es la primera coordenada, y la tangente se obtiene dividiendo seno entre coseno, tenemos el siguiente esquema que resume el signo que tendrán las razones trigonométricas según el cuadrante donde se sitúe el ángulo:



Teniendo en cuenta que el seno es la segunda coordenada y el coseno es la primera coordenada, y la tangente se obtiene dividiendo seno entre coseno, tenemos el siguiente esquema que resume el signo que tendrán las razones trigonométricas según el cuadrante donde se sitúe el ángulo.

Imagen 10: signo de las razones trigonométricas según el cuadrante del ángulo.

Fuente: Propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Ejercicio 14

Los ángulos del cuarto cuadrante....

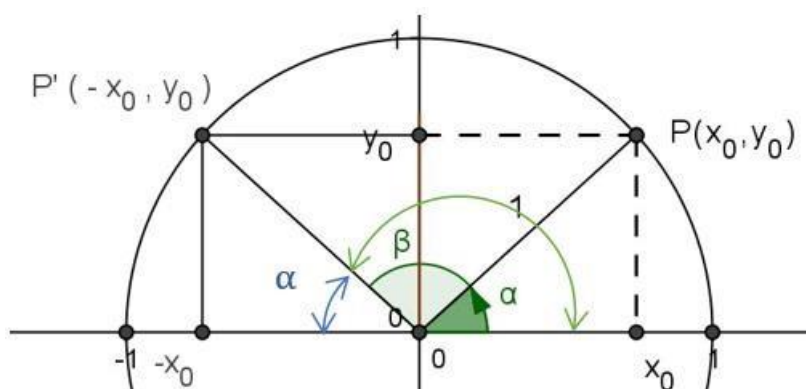
a)	Tienen el seno y el coseno negativos y la tangente positiva
b)	Tienen la tangente y el seno negativos mientras que su coseno es
c)	Tienen todas sus razones trigonométricas negativas
d)	Tienen todas sus razones trigonométricas positivas

7.1) Reducción de ángulos del segundo cuadrante al primero

Ya hemos comentado que los ángulos pertenecientes a cuadrantes diferentes del primero, se pueden relacionar con ángulos agudos del primer cuadrante y que comparten los **MISMOS VALORES ABSOLUTOS** en sus razones trigonométricas, y cuyos signos dependen del cuadrante según la imagen 10.

Pues, vamos a estudiar cómo se relacionan los ángulos del segundo cuadrante con los del primer cuadrante. A estos ángulos se les conoce con el nombre de **ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS**. Dos ángulos α y β son suplementarios cuando al sumarlos obtenemos 180° , es decir:

$$\text{ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS} \rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$$



$$\text{Sen } \alpha = \text{sen } \beta ; \quad \text{cos } \alpha = -\text{cos } \beta ; \quad \text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta$$

Imagen 11: Relación entre ángulos del primer y segundo cuadrante.

Fuente: Propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

En la figura observamos que cuando dos ángulos son suplementarios los puntos que los determinan P y P' comparten el valor absoluto de sus coordenadas y difieren sólo en el signo de la primera coordenada, x_0 .

Por tanto, aplicando la definición de seno y coseno en el ángulo β :

$$\text{Sen } \alpha = \text{sen } \beta ; \quad \text{cos } \alpha = -\text{cos } \beta ; \quad \text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta$$

Ejercicio 15

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 170° :

Ejercicio 16

Señala la respuesta incorrecta....

a) Sen $165^\circ = \text{sen } 15^\circ$
b) Cos $15^\circ = -\text{cos } 165^\circ$
c) tg $15^\circ = \text{tg } 165^\circ$

Ejercicio 17

Calcula las razones trigonométricas de 135° , a partir de los ángulos agudos notables.

7.2) Reducción de ángulos del tercer cuadrante al primero

Los ángulos que se encuentran en el tercer cuadrante son ángulos mayores de 180° pero menores de 270° . En los casos dónde necesitemos reducir al primer cuadrante ángulos que pertenecen al tercero, trabajaremos con ángulos que DIFIEREN 180° .

Propiedad: Sean dos ángulos α y β tales que

$\beta - \alpha = 180^\circ$ entonces se verifica que:

$$\text{Sen } \alpha = -\text{sen } \beta ;$$

$$\text{cos } \alpha = -\text{cos } \beta ; \text{tg}$$

$$\alpha = \text{tg } \beta$$

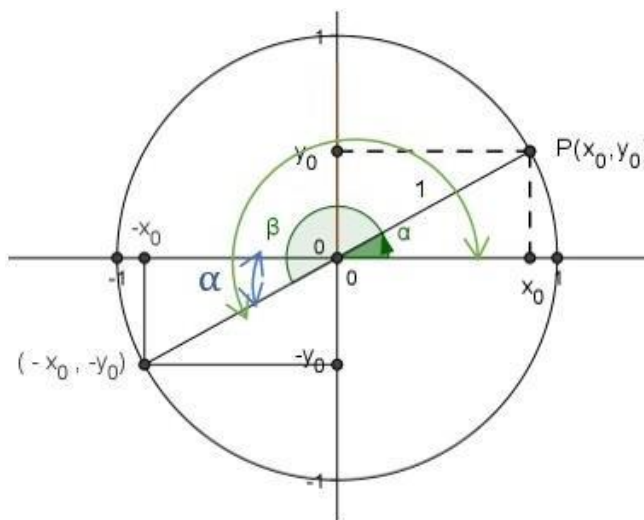


Imagen 12: Relación entre ángulos del primer y tercer cuadrante. Fuente: Propia.

Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Ejercicio 18

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 235° .

Ejercicio 19

Calcula las razones trigonométricas de 240° , a partir de los ángulos agudos notables.

7.3) Reducción de ángulos del cuarto cuadrante al primero

Si el ángulo que queremos reducir al primer cuadrante pertenece al cuarto, entonces veremos que pueden darse dos situaciones hablando del mismo ángulo:

1. **ÁNGULOS OPUESTOS** $\rightarrow \alpha$ y $-\alpha$

2. **ÁNGULOS QUE SUMAN 360°** $\rightarrow \alpha$ y β de forma que $\alpha + \beta = 360^\circ$

En la imagen 13 veremos que el ángulo β coincide con $-\alpha$, y por tanto, podemos decir que $\beta = -\alpha$.

Sean dos ángulos α y β tales que

$\beta + \alpha = 360^\circ$ o $\beta = -\alpha$ entonces se verifica que:

$$\text{Sen } \alpha = -\text{sen } \beta ;$$

$$\cos \alpha = \cos \beta ;$$

$$\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta$$

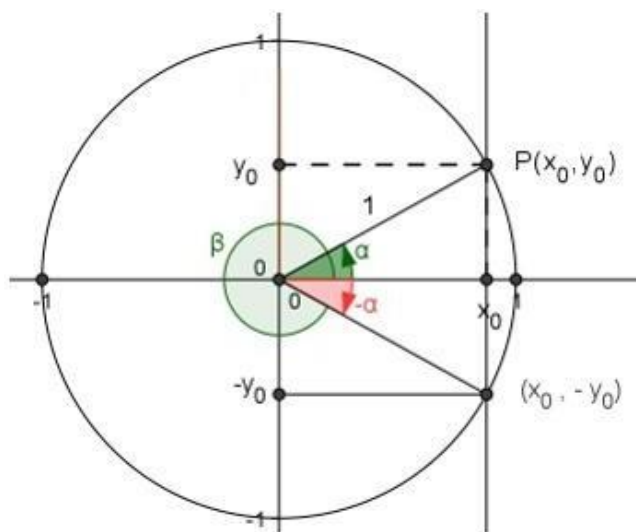


Imagen 13: Relación entre ángulos del primer y cuarto cuadrante.

Fuente: Propia. Autor: Desconocido. Licencia: Desconocida.

Ejercicio 20

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 315° y de -45° .

Ejercicio 21

Calcula las razones trigonométricas de 330° , a partir de los ángulos agudos notables.

9) Aplicaciones de la Trigonometría

La trigonometría es útil para resolver problemas geométricos y calcular longitudes en la realidad.



Con un teodolito, se pueden medir ángulos, tanto en el plano vertical como en el horizontal, que nos permiten, aplicando las razones trigonométricas, hallar distancias o calcular alturas de puntos inaccesibles.

En estos casos aunque el triángulo de partida no sea rectángulo, trazando su altura podemos obtener dos triángulos rectángulos a resolver con los datos que tenemos.

Imagen 14: Teodolito moderno.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Theodolite_in_use.JPG

Autor: Desconocido Licencia: [Creative Commons](#)

Veamos algunos ejemplos.

Imaginemos la siguiente situación:

Para medir la anchura de un río se han medido los ángulos de la figura desde dos puntos de una orilla (punto A y el punto B) distantes entre sí 160 m. ¿Qué anchura tiene el río?

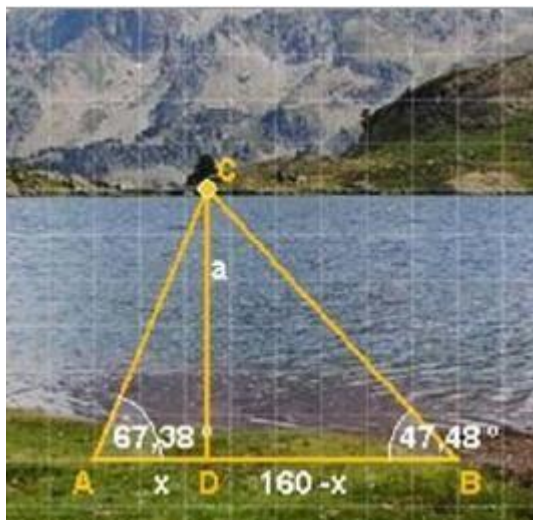


Imagen 15: Río. Autor: Desconocido Licencia: Desconocida.

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/trigonometria/index4_7.ht
m

✓ La anchura del río es la altura (a) del triángulo ACB que no es rectángulo, pero sí lo son los triángulos ADC y BDC.

$$\text{En el triángulo ADC: } \operatorname{tg} 67,38^\circ = \frac{a}{x} \rightarrow a = x \cdot \operatorname{tg} 67,38^\circ$$

$$\text{En el triángulo BDC: } \operatorname{tg} 47,48^\circ = \frac{a}{160-x} \rightarrow a = (160-x) \cdot \operatorname{tg} 47,48^\circ$$

✓ Tenemos un sistema de dos ecuaciones que resolvemos por igualación:

$$\left. \begin{array}{l} a = \operatorname{tg} 67,38^\circ \cdot x \\ a = (160-x) \cdot \operatorname{tg} 47,48^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg} 67,38^\circ \cdot x = (160-x) \cdot \operatorname{tg} 47,48^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow 2,40 \cdot x = (160-x) \cdot 1,09 \rightarrow x = 50 \rightarrow a = 2,40 \cdot x = 2,40 \cdot 50 = 120 \text{ m}$$

Ejercicio 22

La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con la horizontal mide 8 m, ¿cuál es la altura del árbol?

Ejercicio 23

El kiosco de diarios y varios del señor Gutiérrez, proyecta una sombra de 1,8 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del kiosco es de 60°, ¿cuál es la altura del kiosco?

Ejercicio 24

Calcular la altura de un árbol sabiendo que, si nos situamos 8 metros de distancia de la base del tronco, vemos la parte superior de su copa en un ángulo de 36.87°.

Soluciones de los ejercicios del tema

Ejercicio 1

1. Un radián es....

	a) Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide lo mismo que el radio usado para trazarlo
X	b) Es la unidad de medida del sistema internacional y es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide el doble del radio usado para trazarlo
X	c) Es la unidad de medida de ángulos en el mundo anglosajón

Ejercicio 2

2. Pasa a radianes o grados según corresponda:

- a) 225° b) $\frac{5\pi}{4}$ c) 330° d) $\frac{8\pi}{9}$
- a) $225 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{45\pi}{36} = \frac{5\pi}{4}$
- b) $\frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180 \cdot 5}{4} = 225^\circ$
- c) $330 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{33\pi}{18} = \frac{11\pi}{6}$
- d) $\frac{8\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180 \cdot 8}{9} = 160^\circ$

Importante

En las calculadoras usuales suelen aparecer cuatro tipos de medida de ángulos:

- "DEG" o expresión en grados sexagesimales;
- la tecla $<^\circ ' ''>$ da los grados enteros del ángulo y la parte decimal se cuenta en minutos (1/60 de grado) y segundos (1/60 de minuto).
- "RAD" es decir, radianes.
- "GRAD" cada grado centesimal es la centésima parte del ángulo recto, toda la circunferencia está formada por 400 grados centesimales. 1GRAD=90/100 DEG

DEBES TENER MUCHO CUIDADO PORQUE SEGÚN EN QUÉ MODO TENGAS TU CALCULADORA LOS CÁLCULOS TE LOS HARÁ CORRECTAMENTE O NO EN LAS UNIDADES QUE NECESITES.

Ejercicio 3

Transforma estas medidas a segundos:

a) $21^{\circ} 10' 32''$

c) $12^{\circ} 50' 40''$

b) $15^{\circ} 40''$

d) $33^{\circ} 33' 33''$

Para pasar cada medida a segundos, simplemente multiplicamos la cantidad de minutos por 60, y la cantidad de grados por 3600 (que es lo mismo que multiplicar dos veces por 60) y sumamos todo:

a) $21^{\circ} 10' 32'' = 76232''$

c) $12^{\circ} 50' 40'' = 46240''$

b) $15^{\circ} 40'' = 54040''$

d) $33^{\circ} 33' 33'' = 120813''$

Ejercicio 4

Transforma estas medidas a forma compleja:

a) $450''$

c) $4500''$

b) $58' 140''$

d) $1^{\circ} 2000''$

Para transformar las medidas a forma compleja (con grados, minutos y segundos), dividimos los segundos entre 60. El resto de la división serán segundos; el cociente, son minutos. Repetimos la operación con los minutos (los que nos salieran en la división anterior más los que nos dé el ejercicio) pero en este caso el resto de la división serán los minutos totales, y el cociente los grados:

a) $450'' = 7' 30''$

c) $4500'' = 1^{\circ} 15'$

b) $58' 140'' = 1^{\circ} 20''$

d) $1^{\circ} 2000'' = 1^{\circ} 33' 20''$

Ejercicio 5

Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ cuyos catetos miden $b = 30$ cm y $c = 40$ cm.

Calculamos en primer lugar el valor de la hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \Rightarrow a = \sqrt{2500} = 50$ cm.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6; \cos \hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8; \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8; \cos \hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6; \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}.$$

Ejercicio 6

La tangente de un ángulo se define como...

X	a) El cateto opuesto entre cateto adyacente
	b) Cateto opuesto entre hipotenusa
	c) Cateto adyacente entre cateto opuesto
	d) Hipotenusa entre cateto adyacente

Ejercicio 7

Halla las razones trigonométricas de los ángulos de los siguientes triángulos rectángulos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Leftrightarrow b = \sqrt{9} = 3$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$$

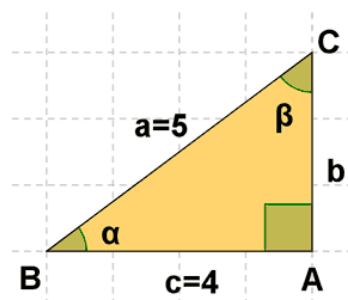
$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$



Ejercicio 8

Calcula el resto de las razones trigonométricas de un ángulo dado α , sabiendo que el $\cos \alpha = 0,939$ y que el ángulo pertenece al primer cuadrante.

Utilizando las relaciones fundamentales sabemos que: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; por tanto sustituyendo y despejando $\sin \alpha$ ya obtenemos su valor:

$$\sin^2 \alpha + 0,939^2 = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - 0,881 \rightarrow \sin^2 \alpha = 0,118 \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{0,118} = 0,343$$

utilizando la otra relación podemos obtener la tangente del ángulo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,343}{0,939} = 0,365$$

Ejercicio 9

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α situado en el segundo cuadrante sabiendo que el $\cos \alpha = -1/4$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como el ángulo α está en el segundo cuadrante es positivo

$$\sin \alpha = +\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{4} : \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{4\sqrt{15}}{4} = -\sqrt{15}$$

Ejercicio 10

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α situado en el tercer cuadrante sabiendo que la $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{16}{9} + 1} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$$

Como la tangente del ángulo es positiva, el ángulo sólo puede pertenecer al primer o al tercer cuadrante. Si pertenece al primer cuadrante, tanto el seno como el coseno serán positivos; mientras que si pertenece al tercer cuadrante ambos serán negativos.

$$\cos \alpha = +\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Ejercicio 11

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:

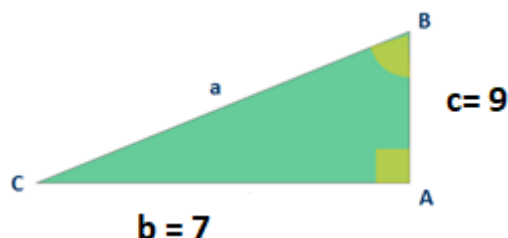


Imagen 9: Triángulo rectángulo para resolver.
Autor: Propia

Resolver un triángulo consiste en dar los datos de sus tres lados y sus tres ángulos.

Como nos dan dos lados, procederemos a resolverlo como el tercer caso. Primero, utilizando Pitágoras podemos obtener el tercer lado:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 7^2 + 9^2 \rightarrow a^2 = 49 + 81 = 130 \rightarrow a = \sqrt{130} = 11,4$$

Ahora ya tenemos el valor de los tres lados. Nos queda por saber el valor de los tres ángulos. Pero como el triángulo es rectángulo, ya sabemos uno de ellos: $\hat{A} = 90^\circ$, por tanto, sólo nos queda por saber cuánto valen los otros dos.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{7}{11,4} = 0,614 \rightarrow \hat{B} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,614 = 37,879^\circ = 37^\circ 52' 45''$$

si procedemos de forma análoga podemos obtener el otro ángulo que nos falta:

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{c}{a} = \frac{9}{11,4} = 0,789 \rightarrow \widehat{C} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,789 = 52,092^\circ = 52^\circ 5' 32''$$

Ejercicio 12

En un triángulo rectángulo se conocen la hipotenusa $a = 5\text{ m}$ y un cateto $b = 4\text{ m}$. Resuelve el triángulo.

Resolver un triángulo consiste en dar los datos de sus tres lados y sus tres ángulos.

Como nos dan dos lados, procederemos a resolverlo como el primer caso. Primero, utilizando Pitágoras podemos obtener el tercer lado:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 5^2 = 4^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow c = \sqrt{9} = 3\text{ m}$$

Ahora ya tenemos el valor de los tres lados. Nos queda por saber el valor de los tres ángulos. Pero como el triángulo es rectángulo, ya sabemos uno de ellos: $\widehat{A} = 90^\circ$, por tanto, sólo nos queda por saber cuánto valen los otros dos.

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{5} = 0,8 \rightarrow \widehat{B} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,8 = 53,13010^\circ = 53^\circ 7' 48''$$

si procedemos de forma análoga podemos obtener el otro ángulo que nos falta:

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6 \rightarrow \widehat{C} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,6 = 36,8698^\circ = 36^\circ 52' 12''$$

Ejercicio 13

En un triángulo rectángulo se conoce el cateto $c = 42\text{ m}$ y su ángulo opuesto $C = 31^\circ$. Resuelve el triángulo.

Resolver un triángulo consiste en dar los datos de sus tres lados y sus tres ángulos.

Como nos dan un lado y un ángulo, procederemos a resolverlo como el segundo caso. Primero, como el triángulo es rectángulo, ya sabemos dos de los ángulos, uno el que nos dan como dato y el otro: $\widehat{A} = 90^\circ$, por tanto, sólo nos queda por saber cuánto vale el tercero. Sabemos que la suma de todos los ángulos de un triángulo debe ser 180° . Así:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \rightarrow \widehat{B} = 180 - 90 - 31 = 59^\circ$$

Ahora ya tenemos el valor de los tres ángulos. Nos queda por saber el valor de los tres lados y sólo tenemos uno. Así que todavía NO podemos usar Pitágoras. Aplicando las definiciones de trigonometría tenemos:

$$\operatorname{sen} \widehat{C} \rightarrow \operatorname{sen} 31^\circ = \frac{42}{a} \rightarrow 0,515 = \frac{42}{a} \rightarrow a = \frac{42}{0,515} = 81,5534\text{ m}$$

Ahora sí que podemos usar Pitágoras para obtener el tercer lado:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 81,5534^2 = 42^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 6650,96 - 1764 = 4886,96 \rightarrow b = \sqrt{4886,96} = 69,91\text{ m}$$

Ejercicio 14

Los ángulos del cuarto cuadrante....

	a) Tienen el seno y el coseno negativos y la tangente positiva
X	b) Tienen la tangente y el seno negativos mientras que su coseno es
	c) Tienen todas sus razones trigonométricas negativas
	d) Tienen todas sus razones trigonométricas positivas

Ejercicio 15

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 170° :

170° pertenece al segundo cuadrante, ya que es mayor de 90° y menor de 180° .

También, 170° es el suplementario de 10° que está en el primer cuadrante porque $\rightarrow 180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$.

Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las razones trigonométricas de 10° , de la siguiente manera:

$$\text{sen } 170^\circ = \text{sen } 10^\circ ; \quad \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ ; \quad \text{tag } 170^\circ = -\text{tag } 10^\circ .$$

Ejercicio 16

Señala la respuesta incorrecta....

	a) $\text{Sen } 165^\circ = \text{sen } 15^\circ$
	b) $\text{Cos } 15^\circ = -\cos 165^\circ$
X	c) $\text{tg } 15^\circ = \text{tg } 165^\circ$

Como $165 + 15 = 180$ son ángulos suplementarios y por tanto sus senos coinciden tanto en valor como en el signo.

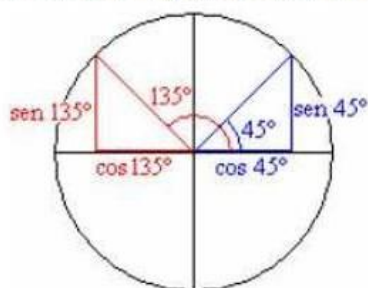
Como $165 + 15 = 180$ son ángulos suplementarios y por tanto sus cosenos coinciden en valor pero con el signo cambiado.

Esta es la respuesta incorrecta, ya que al ser ángulos suplementarios sus tangentes son iguales en valor pero de signo contrario.

Ejercicio 17

Calcula las razones trigonométricas de 135° , a partir de los ángulos agudos notables.

135° es suplementario con 45° ($135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$). Las razones trigonométricas de 135° están relacionadas con las de 45° , la forma más sencilla de encontrar esta relación es de forma gráfica.



$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 135^\circ = \frac{\text{sen } 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\text{sen } 45^\circ}{-\cos 45^\circ} = -\text{tg } 45^\circ = -1$$

Ejercicio 18

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 235° .

Este ángulo pertenece al tercer cuadrante ya que se encuentra entre 180° y 270° . Así, $235^\circ - 180^\circ = 55^\circ$, que está en el primer cuadrante.

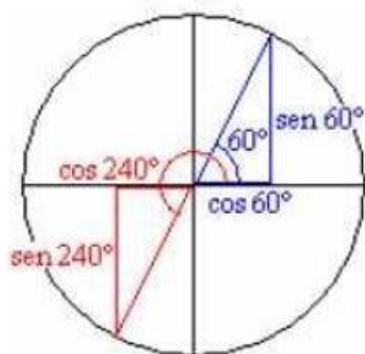
Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las de 55° ya que son ángulos que difieren 180° :

$$\sin 235^\circ = -\sin 55^\circ; \quad \cos 235^\circ = -\cos 55^\circ; \quad \tan 235^\circ = \tan 55^\circ.$$

Ejercicio 19

Calcula las razones trigonométricas de 240° , a partir de los ángulos agudos notables.

240° se asocia a 60° porque se diferencia del él en 180° ($240^\circ = 60^\circ + 180^\circ$).



$$\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ} = \frac{-\sin 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Ejercicio 20

Reduce a un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de 315° y de -45° .

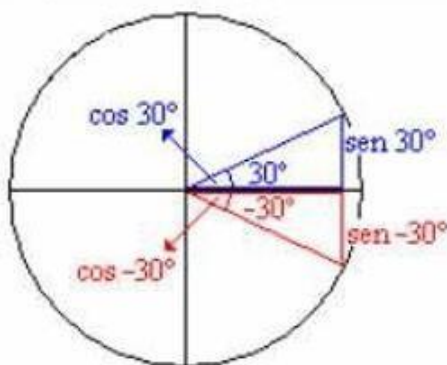
$360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$, que está en el primer cuadrante. Por tanto, se pueden expresar sus razones trigonométricas en función de las de 45° ya que son ángulos que suman 360° : $\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ$; $\cos 315^\circ = \cos 45^\circ$; $\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ$.

Por otro lado -45° es el ángulo opuesto de 45° y por tanto aplican las mismas fórmulas: $\sin -45^\circ = -\sin 45^\circ$; $\cos -45^\circ = \cos 45^\circ$; $\tan -45^\circ = -\tan 45^\circ$.

Ejercicio 21

Calcula las razones trigonométricas de 330° , a partir de los ángulos agudos notables.

330° equivalente a -30° , asociado a 30°



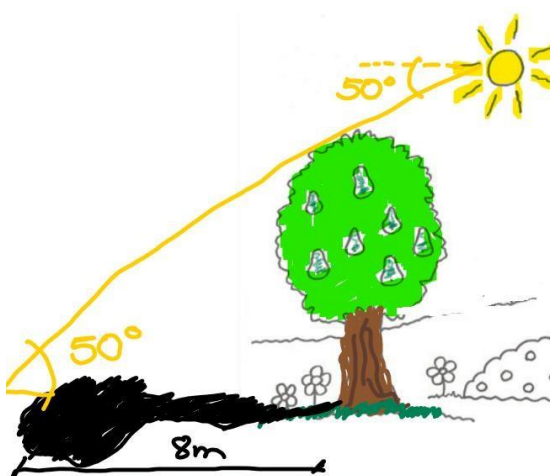
$$\sin -30^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos -30^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan (-30^\circ) = \frac{\sin (-30^\circ)}{\cos (-30^\circ)} = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 22

La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con la horizontal mide 8 m, ¿cuál es la altura del árbol?



Si pasamos la situación a un triángulo tendremos:

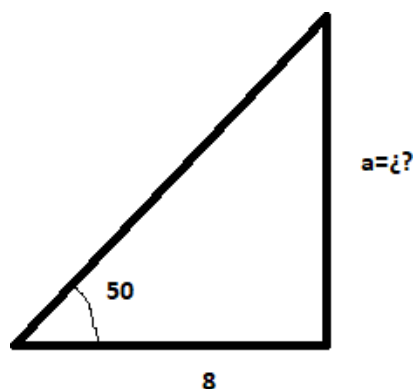


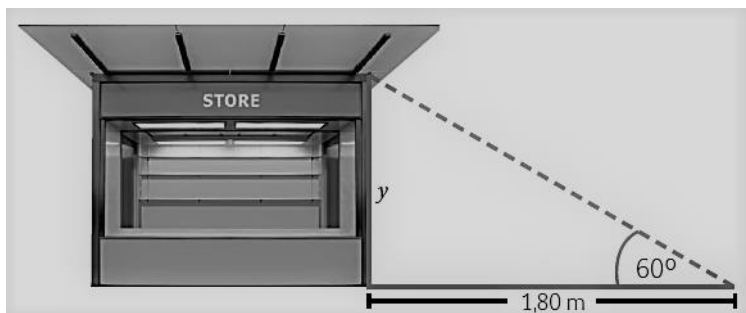
Imagen 15 y 16: Elaboración propia

Se reduce a calcular el valor de a . Para ello sabemos, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas, que:

$$\operatorname{tg} 50 = \frac{a}{8} \rightarrow a = \operatorname{tg} 50 \cdot 8 \rightarrow a = 1,192 \cdot 8 = 9,53 \text{ m}$$

Ejercicio 23

El kiosco de diarios y varios del señor Gutiérrez, proyecta una sombra de 1,8 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del kiosco es de 60° , ¿cuál es la altura del kiosco?



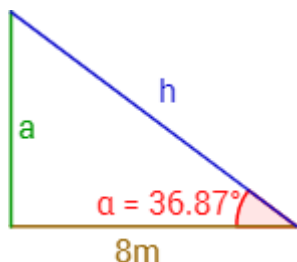
Como lo que nos piden es la altura del kiosco, ésta corresponde con el lado que hemos llamado y ,

Al darnos el otro cateto del triángulo que formaría la sombra con el kiosco, nos interesa usar la tangente:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{1,8} \rightarrow y = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot 1,8 = 1,732 \cdot 1,8 \rightarrow y = 3,12 \text{ m}$$

Ejercicio 24

Calcular la altura de un árbol sabiendo que, si nos situamos 8 metros de distancia de la base del tronco, vemos la parte superior de su copa en un ángulo de 36.87° .



Como nos piden la altura del árbol, ésta corresponde con el lado a de nuestro dibujo.

Por tanto, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas, vemos que la que más nos interesa es la de la tangente:

$$\operatorname{tg} 36,87^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{8} \rightarrow a = \operatorname{tg} 36,87^\circ \cdot 8 = 0,75 \cdot 8 \rightarrow a = 6 \text{ m}$$

Tareas Tema 6

1.- Transforma estas medidas a segundos:

- a) $2^\circ 15' 3''$
- b) $5^\circ 4''$

- c) $17^\circ 52' 43''$
- d) $3^\circ 3' 3''$

2.- Transforma estas medidas a forma compleja:

- a) $550''$
- b) $59' 170''$

- c) $2500''$
- d) $1^\circ 2000''$

3.- Expresa en radianes las medidas de los siguientes ángulos:

- a) 45°
- b) 150°

- c) 210°
- d) 315°

4.- Expresa en grados los siguientes ángulos:

- a) 3 rad
- b) $2,5 \text{ rad}$

- c) $7/2 \pi \text{ rad}$
- d) $\pi/5 \text{ rad}$

5.- Expresa en radianes las siguientes medidas:

- a) 5°
- b) -210°

- c) 1470°
- d) 2520°

6.- Expresa en grados sexagesimales las siguientes medidas:

- a) $2\pi/3$
- b) $3\pi/5$

- c) $3\pi/8$
- d) $5\pi/4$

7.- Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 40° y $\pi/3$ radianes. Calcula en radianes lo que mide el tercer ángulo.

8.- ¿Cuánto mide en grados sexagesimales un ángulo de 1 rad ? Aproxima el resultado con grados, minutos y segundos.

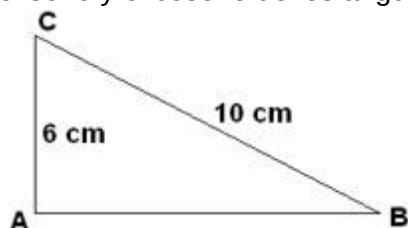
9.- Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de:

- | | |
|---------------|---------------|
| a) 28° | c) 9° |
| b) 62° | d) 81° |

10.- Halla:

- | | |
|------------------------------|------------------------|
| a) $\cos -25^\circ 12' 15''$ | c) $\sin 3500''$ |
| b) $\tan 28^\circ 42' 36''$ | d) $\cos 7^\circ 50''$ |

11.- Halla el seno y el coseno de los ángulos B y C del dibujo:

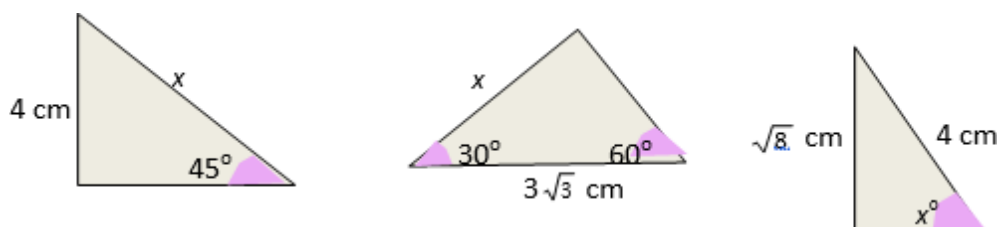


12.- En un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A, si $\tan B = 1,2$ y $b = 3$ cm, ¿cuánto mide c?

13.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos agudos. ¿Cuántos grados miden?

14.- Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $b = 32$ cm y $c = 43,5$ cm.

15.- Calcula el valor de x en los siguientes triángulos rectángulos:



16.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $a = 5$ m y $B = 41,7^\circ$. Resuelve el triángulo

17.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $a = 6$ m y $b = 4$ m. Resuelve el triángulo.

18.- Resuelve los siguientes triángulos rectángulos, sabiendo:

- La hipotenusa $a = 8$ cm y el ángulo $C = 47^\circ 16' 34''$
- Los catetos $b = 9,3$ cm y $c = 4,1$ cm
- La hipotenusa $a = 6,4$ cm y el cateto $c = 3,8$ cm
- Un cateto $b = 10,5$ cm y el ángulo $B = 60^\circ$

19.- Halla, sin utilizar la calculadora, el cuadrante y las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- | | |
|----------------|----------------|
| a) 135° | c) 210° |
| b) 450° | d) -60° |

20.- Sabiendo que $\sin 25^\circ = 0,42$; $\cos 25^\circ = 0,91$ y $\tan 25^\circ = 0,47$; halla (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora) las razones trigonométricas de 155° y de 205° .

21.- Calcula razonadamente, apoyándote en un dibujo, las siguientes razones trigonométricas:

a) $\cos 225^\circ$

c) $\sin 1050^\circ$

b) $\tan 120^\circ$

d) $\tan 720^\circ$

22.- Si a es un ángulo agudo y $\cos a = 0,1$, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

23.- Si a es un ángulo agudo y $\tan a = 0,4$, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

24.- Sabiendo que $\tan \alpha = 2$, y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

25.- El ángulo de elevación de una cometa sujeta con una cuerda de longitud 80 m es 30° . Si choca con otra cometa cuyo ángulo de elevación es 60° . ¿Cuál es la altura de las cometas en ese instante? ¿Y la longitud de la cuerda que sujeta la segunda cometa?

26.- Desde el lugar donde me encuentro, la visual a la torre de una Iglesia forma un ángulo de 52° con la horizontal. Si me alejo 25 m más de la torre, el ángulo es de 34° . ¿Cuál es la altura de la torre?

27.- Desde el lugar donde me encuentro la visual de una torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 15 m, el ángulo es de 50° . ¿Cuál es la altura de la torre?

28.- Queremos fijar un poste de 3,5 m de altura, con un cable que va desde el extremo superior del poste al suelo. Desde ese punto del suelo se ve el poste bajo un ángulo de 40° . ¿A qué distancia del poste sujetaremos el cable? ¿Cuál es la longitud del cable?

Autoevaluación del Tema 6

1. En un triángulo rectángulo, donde los catetos se representan por b y c , y la hipotenusa por a , se verifica el teorema de Pitágoras. ¿Cuál es su fórmula?
a) $b^2 = a^2 + c^2$ b) $a^2 = b^2 + c^2$ c) $c^2 = a^2 + b^2$
2. ¿Cuánto mide la suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo?
a) Más de 90° b) 45° c) 90°
3. ¿Cuántos grados sexagesimales hay en una circunferencia?
a) 360° b) 180° c) 2π
4. ¿Cuál es la unidad de medida de ángulos en el Sistema Internacional?
a) El grado ($^\circ$). c) El radián (rad)
b) El metro (m).

5. ¿Cuántos radianes hay en un ángulo completo?
a) 2π rad. b) π rad. c) 360 rad.
6. ¿Cuántos radianes son 270° ?
a) π rad. b) 2π rad. c) $3\pi/2$ rad
7. ¿Cuántos grados son $\pi/4$ rad.?
a) 45° . b) 90° . c) 180°
8. En triángulo rectángulo, el seno del ángulo α es:
a) La hipotenusa dividido entre el cateto adyacente.
b) El cateto opuesto dividido entre la hipotenusa.
c) El cateto adyacente dividido entre la hipotenusa.
9. ¿Cuál es la fórmula del coseno α en un triángulo rectángulo?
a) La hipotenusa dividido entre el cateto adyacente.
b) El cateto opuesto dividido entre la hipotenusa.
c) El cateto adyacente dividido entre la hipotenusa.
10. Con respecto a las relaciones trigonométricas fundamentales, señala la respuesta correcta:
a) $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$
b) $(\sin \alpha)^2 - (\cos \alpha)^2 = 1$
c) $(\sin \alpha)^2 + (\tan \alpha)^2 = 1$
11. Con respecto a las relaciones trigonométricas fundamentales, señala la respuesta correcta:
a) $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{cosa}}$
b) $\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{cosa}}$
c) $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{cosa}}{\operatorname{sena}}$
12. ¿Cuáles son las razones trigonométricas de 60° ?
a) $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{3}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$
b) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{2}$
c) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$
13. De un triángulo rectángulo se sabe que uno de sus ángulos agudos es 40° y que el cateto opuesto a éste mide 10m. Calcula el ángulo y los lados que faltan.
a) Ángulo= 50° . Cateto=11,9 m. Hipotenusa=15,62 m.
b) Ángulo= 50° . Cateto=15,62 m. Hipotenusa=11,9 m.
c) Ángulo= 60° . Cateto=11,9 m. Hipotenusa=15,62 m.

14. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $b = 3 \text{ m}$ y $B = 54.6^\circ$. Resolver el triángulo.
- a) $C = 35.4^\circ$, $c = 3.68 \text{ m}$, $a = 2.68 \text{ m}$.
 - b) $C = 35.4^\circ$, $c = 2.13 \text{ m}$, $a = 3.68 \text{ m}$.
 - c) $C = 35.4^\circ$, $c = 4.13 \text{ m}$, $a = 5.68 \text{ m}$.
15. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $b = 3 \text{ m}$ y $c = 5 \text{ m}$. Resolver el triángulo.
- a) $C = 59.04^\circ$, $B = 30.96^\circ$, $a = 5.83 \text{ m}$.
 - b) $C = 59.04^\circ$, $B = 30.96^\circ$, $a = 5.83 \text{ m}$.
 - c) $C = 59.04^\circ$, $B = 30.96^\circ$, $a = 5.83 \text{ m}$.
16. Los ángulos del tercer cuadrante....
- a) Tienen el seno y el coseno negativo y la tangente positiva.
 - b) Tiene el seno negativo y el coseno y la tangente positiva.
 - c) Tienen el seno, el coseno y la tangente positiva.
17. Señala la respuesta correcta:
- a) $\cos 25^\circ = -\cos 155^\circ$
 - b) $\operatorname{tg} 20^\circ = \operatorname{tg} 160^\circ$
 - c) $\operatorname{sen} 140^\circ = \operatorname{sen} -40^\circ$.
18. Dos ángulos son suplementarios si al sumarlos obtenemos....
- a) 180° .
 - b) 90° .
 - c) 360° .

SOLUCIONES de la Autoevaluación Tema 6

1. En un triángulo rectángulo, donde los catetos se representan por b y c , y la hipotenusa por a , se verifica el teorema de Pitágoras. ¿Cuál es su fórmula?
- a) $b^2 = a^2 + c^2$
 - b) $a^2 = b^2 + c^2$**
 - c) $c^2 = a^2 + b^2$
2. ¿Cuánto mide la suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo?
- a) Más de 90°
 - b) 45°
 - c) 90°**
3. ¿Cuántos grados sexagesimales hay en una circunferencia?
- a) 360°**
 - d) 180°
 - e) 2π
4. ¿Cuál es la unidad de medida de ángulos en el Sistema Internacional?
- a) El grado ($^\circ$).
 - c) El radián (rad).**
 - b) El metro (m).
5. ¿Cuántos radianes hay en un ángulo completo?
- a) $2\pi \text{ rad.}$**
 - b) $\pi \text{ rad.}$
 - c) 360 rad
6. ¿Cuántos radianes son 270° ?
- a) $\pi \text{ rad.}$
 - b) $2\pi \text{ rad.}$
 - c) $3\pi/2 \text{ rad.}$**

7. ¿Cuántos grados son $\pi/4$ rad.?
a) **45° .** b) 90° . c) 180° .
8. En triángulo rectángulo, el seno del ángulo α es:
a) La hipotenusa dividido entre el cateto adyacente.
b) **El cateto opuesto dividido entre la hipotenusa.**
c) El cateto adyacente dividido entre la hipotenusa.
9. ¿Cuál es la fórmula del coseno α en un triángulo rectángulo?
a) La hipotenusa dividido entre el cateto adyacente.
b) El cateto opuesto dividido entre la hipotenusa.
c) **El cateto adyacente dividido entre la hipotenusa.**
10. Con respecto a las relaciones trigonométricas fundamentales, señala la respuesta correcta:
a) **$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$**
b) $(\text{sen } \alpha)^2 - (\cos \alpha)^2 = 1$
c) $(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{tg } \alpha)^2 = 1$
11. Con respecto a las relaciones trigonométricas fundamentales, señala la respuesta correcta:
a) **$\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$**
b) $\text{sen } a = \frac{\text{tg } a}{\cos a}$
c) $\text{tg } a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}$
12. ¿Cuáles son las razones trigonométricas de 60° ?
a) $\text{sen } 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{3}{2}$, $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$
b) $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{2}$
c) **$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$**
13. De un triángulo rectángulo se sabe que uno de sus ángulos agudos es 40° y que el cateto opuesto a éste mide 10m. Calcula el ángulo y los lados que faltan.
a) **Ángulo= 50° . Cateto=11,9 m. Hipotenusa=15,62 m.**
b) Ángulo= 50° . Cateto=15,62 m. Hipotenusa=11,9 m.
c) Ángulo= 60° . Cateto=11,9 m. Hipotenusa=15,62 m.
14. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $b = 3$ m y $B = 54.6^\circ$. Resolver el triángulo.
a) $C = 35,4^\circ$, $c = 3,68$ m, $a = 2,68$ m.
b) **$C = 35,4^\circ$, $c = 2,13$ m, $a = 3,68$ m.**
c) $C = 35,4^\circ$, $c = 4,13$ m, $a = 5,68$ m.
15. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen $b = 3$ m y $c = 5$ m. Resolver el triángulo.
a) **$C = 59.04^\circ$, $B = 30.96^\circ$, $a = 5.83$ m.**

- b) $C = 59,04^\circ$, $B = 30,96^\circ$, $a = 5,83$ m.
- c) **$C = 59,04^\circ$, $B = 30,96^\circ$, $a = 5,83$ m.**

16. Los ángulos del tercer cuadrante....

- a) **Tienen el seno y el coseno negativo y la tangente positiva.**
- b) Tiene el seno negativo y el coseno y la tangente positiva.
- c) Tienen el seno, el coseno y la tangente positiva.

17. Señala la respuesta correcta:

- a) **$\cos 25^\circ = -\cos 155^\circ$**
- b) $\operatorname{tg} 20^\circ = \operatorname{tg} 160^\circ$

18. Dos ángulos son suplementarios si al sumarlos obtenemos....

- a) **180° .**
- b) 90° .
- c) 360° .