

Bloque 1. Tema 2.

Divisibilidad de los números naturales

ÍNDICE

- 1) Múltiplos de un número natural.
 - 2) Divisores de un número natural.
 - 2.1. Cálculo de los divisores de un número natural.
 - 2.2. Criterios de divisibilidad.
 - 3) Números primos y números compuestos.
 - 4) Descomposición de un número en factores primos.
 - 5) Máximo común divisor de un conjunto de números.
 - 5.1. Método general para calcular el M.C.D. de un conjunto de números.
 - 6) Mínimo común múltiplo de un conjunto de números.
 - 6.1. Método general para calcular el m.c.m. de un conjunto de números.
 - 7) Actividades donde aplicar el máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.
 - 8) Para saber más.
 - 9) Enlaces de interesantes.
 - 10) Autoevaluación.
-

Introducción

Cuando hablamos de divisibilidad de números naturales y por tanto enteros, en el fondo lo que estamos haciendo es medir cuántas veces un número contiene exactamente a otro.

Para desarrollar este apartado debemos empezar definiendo algunos conceptos muy fáciles de entender y básicos para la aritmética.

Para afrontar este tema deberemos conocer el concepto de **número Natural** y de **número Entero**.

1) Múltiplos de un número natural

Los **múltiplos** de un número dado, son los números que se obtienen al multiplicar el número dado por todos los números naturales salvo el 0.

Puesto que hay infinitos números naturales, un número tendrá infinitos múltiplos.

$$\dot{a} = a \cdot \{N\}$$

Por ejemplo para expresar los cuatro primeros múltiplos del número 5 pondremos:

$$\dot{5} = 5 \cdot \{N\} = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 \dots \dots \dots$$

Para saber si un número natural es múltiplo de otro simplemente debes hacer la división y comprobar si es exacta. Ejemplo. ¿Es el número 364 múltiplo de 7?

$$\begin{array}{r|l} 364 & 7 \\ 14 & 52 \\ 0 & \end{array}$$

La respuesta es claramente sí, pues el número 7 multiplicado por el número natural 52 nos dará el número 364. Luego el número 364 contiene 52 veces al número 7.

También podríamos indicar que 364 es múltiplo de 7 de la siguiente forma:

$$364 = \dot{7}$$

(Observa que encima del número 7 hemos puesto un punto).

Ejercicio

Obtén cinco múltiplos del número 7, que sean menores que 1000.

2) Divisores de un número natural

Cuando dividimos dos números naturales (*recuerda que el dividendo debe de ser mayor o igual que el divisor*), si el resto de dicha división es cero, diremos que la división es exacta.

Los **divisores** de un número natural son aquellos números que pueden dividirlo de manera exacta.

Así, el número 7 es divisor de 364 o también podemos decir que el número 364 es divisible entre 7 ya que al dividir 364 entre 7 el resto es 0.

$$\begin{array}{r|l} 364 & 7 \\ 14 & 52 \\ 0 & \end{array}$$

Para saber si un número es divisor de otro, solo tienes que hacer la división y comprobar si el resto es 0.

Ejercicio

¿El número 9 es divisor de 74, o el número 74 es divisible por 9 ?

2.1. Cálculo de los divisores de un número natural

Para calcular los divisores de un número dado, realizaremos divisiones repetidas de dicho número por los números naturales comenzando por el uno, hasta que el cociente que obtengamos sea menor o igual que el divisor.

Los divisores del número dado serán todos los divisores y los cocientes de las divisiones exactas que hayamos obtenido en el proceso.

Veamos como calcularíamos los divisores por ejemplo del número 18.

18 | 1
0 | 18

18 | 2
0 | 9

18 | 3
0 | 6

18 | 4
2 | 4

18 | 5
3 | 3

Luego los divisores del número 18 serán: **1,2,3,6,9,18**

Debes recordar que entre los divisores de cualquier número siempre están el 1 y el mismo número.

Ejercicio

Calcular los divisores del 15

Ejercicio

Observa que “un número tiene infinitos múltiplos pero solo unos cuantos divisores”. ¿Te atreverías a dar una razón?

Ejercicio

¿Cómo mínimo, cuántos divisores tendrá un número?

2.2. Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son unas reglas que nos permiten averiguar si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. Vamos a ver algunas de estas reglas:

- Un número es **divisible por 2** si acaba en cero o en cifra par.
Ejemplo: 534 y 430 son divisibles entre dos.
- Un número es **divisible por 3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de tres.
Ejemplo: el 681 es divisible entre 3 ya que si sumas sus cifras: $6 + 8 + 1 = 15$, y el 15 es múltiplo de 3.
- Un número es **divisible por 4** si las dos últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 4.
Ejemplo: el 824 y el 7200 son divisibles por 4. El 824 por que sus dos últimas cifras, 24, son múltiplo de 4 y el segundo número 7200, por ser sus dos últimas cifras 00.
- Un número es **divisible por 5** si acaba en cero o en 5.
Ejemplo: el 675 y el 980 son divisibles entre cinco.
- Un número es **divisible por 6** si es divisible por 2 y por 3 a la vez.
Ejemplo: el 528 es divisible por 6 porque es divisible por 2 (ya que acaba en cifra par) y también es divisible por 3 (ya que al sumar sus cifras da un número múltiplo de 3, como se ve a continuación $5 + 2 + 8 = 15$).
- Un número es divisible por 7 cuando al quitarle la cifra de las unidades y restarle el duplo de esta cifra el número resultante es cero o múltiplo de siete.
Ejemplo. 105 ¿es múltiplo de siete?



Y el número 2261, es también múltiplo de 7.



- Un número es divisible por 8, si sus tres últimas cifras son ceros o múltiplo de 8.
Ejemplo: 4 000, 1 048, 1 512, ...
- Esta regla es idéntica a la del 3. Un número es **divisible por 9** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
Ejemplo: el 684 es divisible entre 9 ya que si sumas sus cifras: $6 + 8 + 4 = 18$ y el 18 es múltiplo de 9.
- Un número es **divisible por 10** si acaba en cero.
- Un número es **divisible por 11** cuando la diferencia de la suma de las cifras del lugar par y la suma de las cifras del lugar impar es múltiplo de 11. (La resta se hace en el sentido que sea posible).
Ejemplo: 96855 es divisible entre 11 ya que si sumamos las cifras de lugar impar $5+8+9=22$, y las de lugar par $5+6=11$ y luego restamos $22-11=11$, que es múltiplo de 11.

Ejercicio

¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 9 y por 3?

657, 872, 8.743, 9.357, 4.518

Ejercicio

Indica el dígito que debe introducirse en el recuadro “ ” para que se cumplan las siguientes condiciones:

- a) 4521 sea divisible por 6
- b) 2231 sea divisible por 3
- c) 5204 sea divisible por 5
- d) 6173 sea divisible por 11

3) Números primos y números compuestos

Los **números primos** (llamados por los griegos *prótos arithmos*), son todos los números naturales, mayores que 1, los cuales son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad.

Cuando un número no es primo se dice que es **compuesto** y estará formado por la multiplicación de números primos.

- Para hallar los números primos menores que 100, podemos utilizar la llamada **criba de Eratóstenes** (matemático griego que vivió en el siglo III a.C).

Se procede así:

- 1) Se escriben todos los números desde el 2 (primero número primo) hasta el 100.
- 2) Tachamos de 2 en 2 a partir del 2. De esta forma se suprimen todos los números múltiplos de dos.
- 3) Tachamos de 3 en 3 a partir del 3. Así se suprimen los números compuestos múltiplos de tres.
- 4) Y así sucesivamente vamos tachando de 5 en 5, de 7 en 7, y de 11 en 11.

Pero al hacer esto se observa que los múltiplos de 11 ya están tachados, por lo que no hace falta continuar.

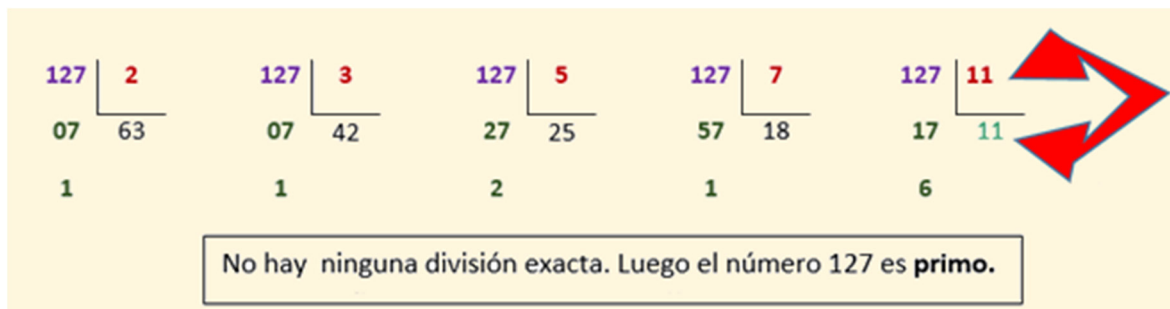
Los números que no han sido tachados son primos. Y son los que figuran en esta tabla.

	2	3		5		7			
11		13		15		17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61									
71		73						79	
		83						89	
						97			

- Si los números fueran muy grandes, para saber si es primo podríamos proceder como hicimos para determinar los divisores de un número.

Se divide el número por la serie de los números primos hasta llegar a una división, cuyo cociente sea **igual o menor** que el divisor. Si todas las divisiones son inexactas, el número propuesto es primo.

Veamos si el número 127 es un número primo.



127 | 2 127 | 3 127 | 5 127 | 7 127 | 11

07 63 07 42 27 25 57 18 17 11

1 1 2 1 6

No hay ninguna división exacta. Luego el número 127 es **primo**.

Ejercicio

Averigua cuáles de los siguientes números son primos:

- a) 123
- b) 101
- c) 169
- d) 97
- e) 143

Ejercicio

¿Cuántos números primos podríamos hay?

4) Descomposición de un número en factores primos

Cualquier número natural **compuesto** se puede **descomponer de forma única** en productos de potencias de factores primos. (Teorema fundamental de la aritmética)

El procedimiento de factorización consiste en dividir el número dado y sus cocientes sucesivos, por el menor número primo distinto de 1 que sea divisor, de manera progresiva hasta llegar a un cociente de valor la unidad.

Vamos a descomponer en sus factores primos el número 90.

Es conveniente comenzar el proceso de manera ordenada, partiendo del menor primo que sea divisor. (Aunque podríamos empezar por el que quisiéramos)

Descomposición del número 90

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \begin{array}{l} | 2 \\ \hline 0 \end{array} \\ 45 \begin{array}{l} | 3 \\ \hline 0 \end{array} \\ 15 \begin{array}{l} | 3 \\ \hline 0 \end{array} \\ 5 \begin{array}{l} | 5 \\ \hline 0 \end{array} \\ 1 \end{array}$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

CASO DE UN NÚMERO QUE ACABE EN CEROS: al descomponer en factores un número que acabe en ceros, podemos considerar que la descomposición factorial de $10 = 2 \cdot 5$; de $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $1.000 = 2^3 \cdot 5^3$ y así sucesivamente.

Por ello, al descomponer el número 3.000 en factores primos, podemos escribir directamente: $3.000 = 3 \cdot 1000 = 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$

Si descomponemos el 70.000 sería: $70.000 = 7 \cdot 10000 = 7 \cdot 2^4 \cdot 5^4$

Ejercicio

Haz la descomposición en factores primos de los siguientes números:

a) 180; b) 250 ; c) 640; d) 5000

5) Máximo común divisor de un conjunto de números

Dado dos o más números naturales, el **máximo común divisor**, si existe, será el mayor de los divisores comunes que tengan los números dados.

Este es un concepto que vas a comprender muy bien con el siguiente ejemplo:

Los divisores del 24 son: 24, 12, 8, **6**, 4, **3**, **2** y 1

Los divisores del 90 son: 90, 45, 30, 18, 15, 10, 9, **6**, 5, **3**, **2** y 1

Los números señalados en rojo son divisores comunes a 24 y 90 y el mayor de esos divisores es el 6. Luego **6** es el **máximo común divisor**.

- Dos números se dice que son **primos relativos** entre sí cuando sin ser ellos números primos, su único divisor común es el 1, es decir, no tienen divisores comunes.

Por ejemplo 20 y 21 son primos relativos entre sí, porque sólo tienen el 1 como único divisor común, lo mismo que 12 y 35.

5.1. Método general para calcular el M.C.D. de un conjunto de números

Pero el cálculo del m.c.d de la manera indicada nos llevaría mucho tiempo, mejoramos el rendimiento si utilizamos la descomposición factorial.

Así, el M.c.d de varios números dados, **si existe**, será el producto de los factores primos comunes elevados al **menor exponente**.

Observa el siguiente ejemplo. Calculemos el máximo común divisor de 12 y de 30:

Para ello seguiremos el siguiente procedimiento:

1º. Realizaremos la descomposición factorial de los números dados:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

2º. El máximo común divisor es el **producto de los factores comunes con el menor exponente**:

$$\text{M.C.D.} = 2 \cdot 3 = 6$$

Ejercicio

¿Dado dos o más números naturales siempre existirá el m.c.d entre ellos?

¿De existir el m. c. d será un número mayor, igual o menor a los números dados?

Ejercicio

Calcula el m.c.d. de los siguientes pares de números:

- a) 30 y 24
- b) 32 y 240
- c) 180 y 210
- d) 120 y 320

Ejercicio

Resuelve esta posible situación que le ocurrió a un dependiente de ultramarinos.

Tenía que preparar un envío de 18 paquetes de leche entera y 12 de leche desnatada en cajas, de manera que:

- a.) No se mezclen los paquetes de cada tipo de leche.
- b.) Que no sobre ningún paquete.
- c.) Que cada caja lleve la misma cantidad de paquetes.
- d.) Que cada caja lleve el mayor número posible de paquetes.

¿Cuántas cajas harían falta y cuántos paquetes llevará cada caja?

6) Mínimo común múltiplo de un conjunto de números

El **mínimo común múltiplo** de un conjunto de números es el múltiplo común más pequeño que comparten.

Este concepto lo vas a comprender muy bien con el siguiente ejemplo:

Los múltiplos del 6 son: 6; **12**; 18; **24**; 30; **36**; 42; 48;...

Los múltiplos del 4 son: 4, 8; **12**; 16; 20; **24**; 28; 32; **36**;...

Los números marcados en azul son múltiplos comunes a ambos y el **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** es el más pequeño de los comunes; es decir el **12**

El método que hemos seguido no es el más adecuado para hacer el cálculo del mínimo común múltiplo ya que solo es útil cuando se trata de números muy sencillos. Es más eficiente emplear el proceso de factorización que veremos seguidamente.

Así, dados dos o más números naturales, el mínimo común múltiplo será el obtenido al multiplicar los **factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente** de la descomposición factorial de dichos números.

6.1. Método general para calcular el m.c.m. de un conjunto de números

Pero el cálculo del m.c.m de la manera indicada anteriormente, nos llevaría mucho tiempo, mejoramos el rendimiento si utilizamos la descomposición factorial.

Así, el m.c.m de varios números dados, que **siempre existe**, será el producto de los factores primos **comunes y no comunes elevados al mayor exponente** de la descomposición factorial de dichos números..

Observa el siguiente ejemplo. Calculemos el máximo común divisor de 12 y de 30:

Para ello seguiremos el siguiente procedimiento:

1º. Realizaremos la descomposición factorial de los números dados:

The diagram illustrates the prime factorization of 12 and 30 using a ladder method. On the left, 12 is divided by 2 to get 6, then 6 is divided by 2 to get 3, and finally 3 is divided by 3 to get 1. On the right, 30 is divided by 2 to get 15, 15 is divided by 3 to get 5, and finally 5 is divided by 5 to get 1. Brackets group the factors for each number, and boxes below show the final prime factorizations: $12 = 2^2 \cdot 3$ and $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

2º. El mínimo común múltiplo es el **producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente**: $m.c.m. = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Ejercicio

Determina el mínimo común múltiplo de 60 y 90

Ejercicios

- 1) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de los números 125 y 225?
 - a) 525
 - b) 1125
 - c) 225

- 2)
 - a) ¿Por qué nunca nos piden calcular el máximo común múltiplo?
 - b) ¿Por qué nunca se nos pide calcular el mínimo común divisor?

- 3) En una urbanización el jardinero arregla el jardín cada 12 días y los cristales del edificio se limpian cada 30. El presidente de la comunidad se reúne con el jardinero y el limpiador cada vez que estos coinciden en la urbanización. Hoy han coincidido y la reunión se ha celebrado, ¿dentro de cuantos días se celebrará la próxima reunión?

- 4) Dados los números 20 y 30, determina el producto de su mcm x mcd. Factoriza el número resultante y saca una conclusión.

7) Actividades donde aplicar el M.c.d. y el m.c.m.

- 1) Se quiere aserrar una plancha de madera en cuadrados lo más grandes posible. ¿Cuánto podrá medir el lado de cada cuadrado si la longitud de la plancha es de 120 cm y la anchura de 75 cm?

- 2) Un barco A sale de un puerto cada 18 días y un barco B sale del mismo puerto cada 27 días. Hoy han coincidido ambos barcos en el puerto. ¿Cuánto tiempo tardarán en volver a coincidir?

- 3) Una pareja de novios han quedado para verse a las 7 de la tarde en un bar, pero, por equivocación, cada uno va a un local diferente de la misma calle. Ella sale cada 15 minutos para comprobar si llega el novio y él sale cada 10 minutos. ¿A qué hora se encontrarán?

- 4) Se quiere cercar con estacas un campo rectangular de 756 metros de largo y 234 metros de ancho. Se pretende que todas las estacas estén a la misma distancia entre sí y que haya una estaca en cada esquina. ¿Cuál es el menor número de estacas que hay que poner?

8) Para saber más.

Cálculo del máximo común divisor por el **Algoritmo de Euclides**.

Este procedimiento se fundamenta en el principio de divisibilidad por el cual, "si un número divide a la vez al dividendo y al divisor de una división dada, dividirá también al resto de dicha división si no fuese exacta.

El procedimiento consiste en realizar una primera división, si esta resulta exacta el divisor de la misma será el número buscado, si no, procedemos a dividir el divisor anterior por su resto, hasta conseguir una división exacta. Si no se alcanzase esta significaría que no tienen divisores comunes.

Ejercicio

Determina el máximo común divisor si existe de 420 y 360, utilizando el algoritmo de Euclides.

Para determinar el m.c.d de varios números utilizando el algoritmo de Euclides empezamos calculado el m.c.d de dos de ellos, luego calcularíamos el m.c.d del resultado anterior con el siguiente número y así sucesivamente. El último mcd hallado si existe será el número buscado.

Ejercicio

Determina el máximo común divisor si existe de 420, 360, 720 y 450 utilizando el algoritmo de Euclides.

Recuerda que para empezar el algoritmo siempre el dividendo tiene que ser mayor que el divisor.

Ejercicio

Determina el mcd de 380, 420, 170 y 35 utilizando el algoritmo de Euclides.

9) Enlaces de interesantes.

En el siguiente enlace podrás encontrar desarrollado el tema de los múltiplos y divisores, con ejemplos interactivos.

Es recomendable:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Multiplos_divisores/index.htm

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/divisibilidad/mcd_mcm.htm

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Multiplos_divisores/desfacto.htm

10) Autoevaluación.

Pregunta.1.- Elige el valor que debe tomar la letra “a” para que el número 413a sea divisible por 2.

- a) 0, 2 y 5
- b) Cualquier dígito impar
- c) Cualquier dígito par

Pregunta.2.- Elige el valor que debe tomar la letra “a” para que el número 2a46 sea divisible por 3.

- a) 0, 3, 6 y 9
- b) 2, 5 y 8
- c) 0, 4, 6 y 8

Pregunta.3.- El m.c.d. (60,90) y m.c.m. (60,90)

- a) el m.c.d es 180 y el m.c.m 30
- b) el m.c.d es 30 y el m.c.m 180
- c) el m.c.d es 30 y el m.c.m 120

Pregunta.4.- Cual de las siguientes cuestiones es la correcta.

- a) Un viajero va a Barcelona cada 18 días y otro cada 24 días. Hoy han estado los dos en Barcelona. Volverán a estar los dos a la vez en Barcelona dentro de 70 días.
- b) Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible. Por tanto la longitud del lado de cada cuadrado debe ser de 32 cm.

Pregunta.5.- Di cuáles de los siguientes números es primo:

- a) 327
- b) 451
- c) 771

Pregunta.6.- El mcd de 120 y 320, es:

- a) 30
- b) 120
- c) 40

Pregunta.7.- El número 151 es un número primo. ¿Cuántos múltiplos tiene?

- a) Dos el 1 y el mismo.
- b) 151 múltiplos.
- c) Una cantidad innumerable de números.

Pregunta.8.- De dos números sabemos que el producto de su m.c.d por su m.c.m es 216. Si uno de los números sabemos que es 36, ¿cual será el otro número?

- a) 6
- b) 16
- c) 3

Pregunta.9.- Tres cables que miden 115, 80 y 75 m se dividen en el menor número posible de trozos de igual longitud. ¿Cuántos trozos obtendremos y de que longitud?

- a) 56 trozos de 6 m
- b) 45 trozos de 10 m
- c) 54 trozos de 5 m

Pregunta.10.- La factorización del número 750 es:

- a) $5^3 \cdot 2 \cdot 5$
- b) $5^3 \cdot 2 \cdot 3$
- c) $5^2 \cdot 2 \cdot 5$