Bloque 3. Tema 7. Álgebra

Toledo: puerta de entrada del álgebra en Europa

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Dos matemáticos se encuentran en la base del desarrollo del álgebra, Diofanto de Alejandría y **Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi.**

Del primero se conoce que debió vivir sobre el siglo III, conocido por su Aritmética, un trabajo sobre la solución de ecuaciones algebraicas y sobre la teoría de números.

Su epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega rezaba así:

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

El mundo árabe medieval, conoció la Aritmética poco después de que el célebre AlJwarizmi redactara, hacia el año 830, su Kitab al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala.

Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi, (780-850) es considerado el padre del Algebrá. Llamado a Bagdad por el califa abasida Al Mamun, continuador de la Academia de Ciencias creada por su padre, llamada la Casa de la Sabiduría, en ella se tradujeron al árabe obras científicas y filosóficas griegas e hindúes. En este ambiente científico y multicultural se educó y trabajó Al-Khwarizmi. Todo este florecimiento traería importantes consecuencias en el desarrollo de la ciencia en Europa, principalmente a través de España, donde muchas obras serán traducidas al latín en la escuela de traductores de Toledo.

Al-Khwarizmi fue un recopilador del conocimiento de los griegos e hindúes, principalmente de matemáticas, pero también de astronomía (incluyendo el calendario judío), astrología, geografía e historia. Su trabajo más conocido y usado fueron sus Tablas Astronómicas, basadas en conocimientos de los hindúes. Incluyen algoritmos para calcular fechas y las primeras tablas conocidas de las funciones trigonométricas seno y cotangente.

De su aritmética, posiblemente denominada originalmente "Kitab al-Jam'a wal-Tafreeq bil Hisab al-Hindi", sólo conservamos la versión latina, Algoritmi de Numero Indorum, del siglo XII. En esta obra describe con detalle el sistema hindú de numeración posicional en base 10 y la manera de hacer cálculos con él. Fue esencial para la introducción de este sistema de numeración en el mundo árabe y posteriormente en Europa. El que nos haya llegado a través de los árabes hace que le llamemos habitualmente sistema de numeración árabe, cuando deberíamos llamarlo indo-arábigo.

Su tratado de álgebra es una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Quizás éste es el libro árabe más antiguo conocido y parte de su título "Kitab al-jabr wa'l-muqabala" da origen a la palabra álgebra. Esta obra representa para el Álgebra lo mismo que Los Elementos de Euclides para la Geometría.

El trabajo de Al'Khwarizmi permitió preservar y difundir el conocimiento de los griegos (con la notable excepción del trabajo de Diofanto) e hindúes, pilares de nuestra civilización.

Caso práctico

Al final del tema deberás ser capaz de contestar a la siguiente pregunta:

¿Cuánto tiempo vivió Diofanto según la información dada por su epitafio?

1) EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Cuando hacemos ***operaciones entre números y letras****, decimos que se trata de expresiones* **algebraicas**.

El lenguaje algebraico sirve para traducir a simbología matemática, enunciados con operaciones entre cantidades que no conocemos.

Las cantidades desconocidas se les llaman ***incógnitas o variables***.

Ejemplos de expresiones algebraicas serían:

- El cuadrado de la suma de dos números. $(x+y)^2$
- Si un litro de gasolina cuesta 1,05 € ¿Cuánto costarán **x** litros? C=1,05.**x**

Luego una incógnita o variable no es más que **un número desconocido** en el momento de realizar la operación aritmética en la que participa.

Ejercicio 1

Expresa las siguientes oraciones del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Utiliza alguna de las siguientes expresiones:

x, x +1, x +2	x.(x –1) = 30	y2	x3 + 3x2	f-g	(x+1)/x	(2x/3)-5=12
x+7	x2 + 7	x	2x+5	x/2	1500-x	[(3x/5)+(x+1)/2]=3

Lenguaje Semántico	Lenguaje Algebraico
Un número cualquiera	
Un número cualquiera aumentado en siete.	
La diferencia de dos números cualesquiera.	
El doble de un número excedido en cinco.	
La división de un número entero entre su precedente.	
La mitad de un número.	
El cuadrado de un número.	
Las dos terceras partes de un número disminuido en cinco es igual a 12.	
Tres números naturales consecutivos.	
El cuadrado de un número aumentado en siete.	
Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a 3.	

El producto de un número positivo con su antecesor equivale a 30.	
El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número.	
Lo que excede 1500 del valor de X	

1.2) VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se **obtiene** al sustituir las letras (variables) por números y efectuar las operaciones indicadas.

Veamos un ejemplo:

La expresión v.*t* sirve para calcular el espacio recorrido por un móvil en función de su velocidad y del tiempo que este está en movimiento (llamamos *v* a la velocidad y *t* al tiempo).

1) Si la velocidad es 60 km/h y está 2 h en movimiento, ¿cuántos km recorrerá?
2) Si ahora la velocidad fuese 75 km/h y el tiempo 4 horas y media (4,5 h), ¿cuál sería el espacio recorrido?

Valoración caso 1.- espacio recorrido= v.t = 60 km/h . 2 h =120 km

Valoración caso 2.- espacio recorrido= v.t =75 km/h .4,5 h=337,5 km

Ejercicio 2

Determina el valor numérico de la expresión: $x^4.y^2.z^3$; siendo x = 4, y = 3, z =1/2.

Ejercicio 3

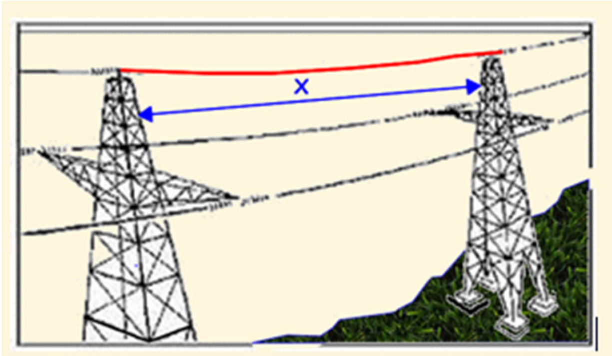
Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica: $\frac{5x2}{3}-\frac{2.x.y}{5}+\frac{y}{3x}=$

Siendo el valor de las variables: x=2; y=1/4

2) MONOMIOS

Una expresión algebraica en la que **sólo** aparece la operación de multiplicar es un **monomio**.

Podríamos preguntarnos cuál es la distancia que separa las torres eléctricas de la imagen.



La respuesta la encontraríamos en el siguiente monomio:

Distancia = X

Tengamos ahora en consideración el cuadrado de esta otra figura donde sabemos que su lado tiene una longitud de X unidades.

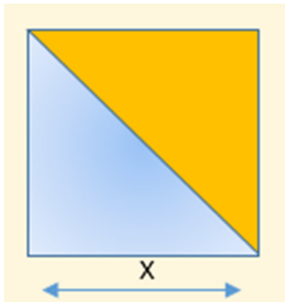
Si quisiéramos saber cuál es su área.

La respuesta la encontraríamos en el siguiente monomio:

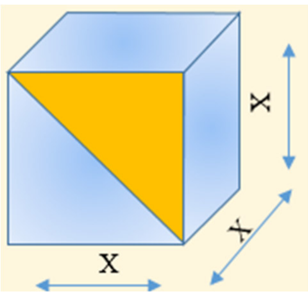
Área $_{\text{cuadrado}}$ = Lado * Lado = X.X= X^2

Si trazamos en el cuadrado su diagonal se nos habrán formado dos triángulos, el área de cada uno de ellos será por tanto la mitad del área del cuadrado.

$$\text{Área del Triángulo} = \frac{1}{2} \cdot x^2$$



Y si construyésemos un cubo con esos cuadrados, el volumen del mismo vendría determinado por el siguiente monomio:



$$Volumen_{cubo} = Bas.Altura = x.x.x = x^3$$

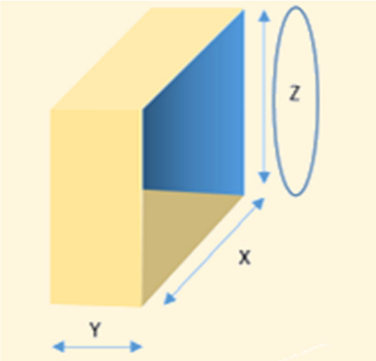
Así pues, un monomio sirve para expresar diferentes magnitudes como, distancias, superficies, volúmenes. Tendremos que estudiar qué es lo que les hace característicos, pero antes veamos otros monomios donde aparecen dos variables.

Supongamos ahora que tenemos un rectángulo que tiene **Y** unidades de ancho y **X** unidades de alto.

El área de dicho rectángulo sería el monomio:

Área rectángulo = Base. Altura= Y. X

En el siguiente paralelepípedo de dimensiones respectivas X, Y y Z, que como se aprecia en la figura representan las dimensiones de su ancho, largo y alto.



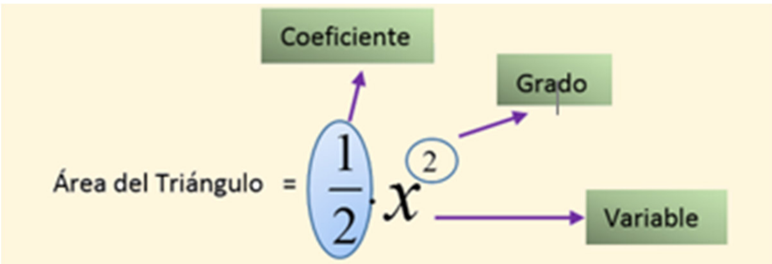
El volumen de dicho cuerpo lo podríamos calcular con el siguiente monomio:

Volumen = Base . Altura= Largo. Ancho. Alto = X.Y.Z

En los monomios denominamos a las partes que los componen del siguiente modo:

- Se llama **grado** de un monomio, al exponente al que está elevada su variable.
- Si el monomio estuviese formado por **dos o más variables**, el grado de dicho monomio sería la suma de los exponentes de las variables.
- Se llama **coeficiente** de un monomio, al número real que multiplica a la variable o las variables, en el supuesto que hubiese más de una.

  Cuando el coeficiente tiene como valor **uno**, no se suele poner.
- Se llaman **variables** a los valores numéricos no conocidos.
- Se llama **valor numérico** de un monomio, al número que obtenemos al sustituir la variable por números, realizando las operaciones indicadas



Cuando dos o más monomios tienen el mismo grado y están formados por las mismas variables, se dice que son monomios **semejantes** y, representan magnitudes físicas equivalentes. En los ejemplos vistos representaban una longitud, una superficie y un volumen.

Si los monomios no tienen el mismo grado o no están formados por la misma variable, los monomios se dirán que no son semejantes y por tanto no representan a magnitudes físicas equivalentes, no pudiéndolos agrupar en un solo monomio.

Ejercicio 4

Completa la tabla.

Monomio	Coeficiente	Variable	Grado
$3.axy^2$	3	a,x,y	
$-5.z^3$			
	-4	x	1
$x^3.y^3$		x,y	
5		Cualquiera	

2.1) OPERACIONES CON MONOMIOS

Suma y Resta de Monomios.

Sólo pueden sumarse y restarse, los monomios semejantes.

Procedimiento:

*Para **sumar/restar** dos monomios semejantes, se **suma/resta** los coeficientes y, se deja la misma variable.*

Veamos un ejemplo:

Calcula estas sumas de monomios semejantes:

a) $5x^3+8x^3-2x^3=(5+8-2).x^3=\mathbf{11.x^3}$

b) $\frac{1}{2}y^2+y^2-\frac{5}{6}y^2=(\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6}).y^2=\frac{2}{3}\cdot y^2$

Producto de Monomios.

Para multiplicar dos monomios no es necesario que estos sean semejantes.

Procedimiento.:

El producto de monomios, será otro monomio que tendrá como coeficiente el producto de los coeficientes y como exponente de la **misma variable**, la suma de los exponentes, pues será el producto de potencias de la misma base.

Veamos un ejemplo:

Multiplica los siguientes monomios: $(-3x^2)\ .\ (7x^3) = (-3x^2)\ .\ (7x^3) =(-3.7).(x^2.x^3)=-21.x^5$

Cociente de Monomios.

- *No es necesario que sean semejantes.*
- *El grado del monomio dividendo debe ser mayor o igual al grado del monomio divisor, para no generar fracciones algebraicas.*

Procedimiento:

Al dividir dos monomios obtenemos otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es la misma letra elevada a la resta de los exponentes. (Recordar cociente de potencias de la misma base).

Veamos un ejemplo:

Vamos a dividir el monomio $6x^5$ *entre el monomio* $3x^2$

$$\frac{6x^5}{3x^2}=\frac{6}{3}\cdot\frac{x^5}{x^2}=2.x^{5-2}=2.x^3$$

Ejercicio 5

Indica cuales de los siguientes monomios son semejantes.

a) $2x^3$	b) $4x^4$	c) $-6x^2$	d) $\frac{4}{5}x^3$
e) $-2x$	f) $-\frac{1}{2}x^2$	g) $\frac{4}{5}x^3$	h) $-10x^4$

☐	Son semejantes: • b,h • a,d,g • c,f,e
☐	Son semejantes: • b,h • a,d,g • c,f
☐	Son semejantes: • b,h,f • a,d,g • c,f

Ejercicio 6

Realiza las siguientes operaciones con monomios:

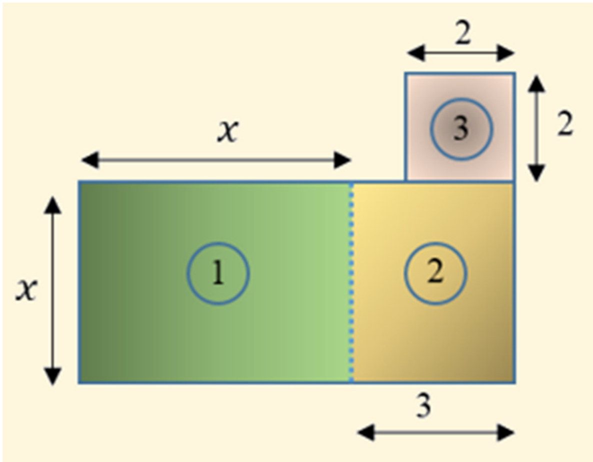
a) $2x^3-7x^3+x^3$ =

b) $\frac{4}{3}x^2(-2x)=$

c) $\frac{2}{4x^6}\cdot(x^7)=$

3) POLINOMIOS

Supongamos que deseamos conocer el área (dividida en tres zonas) de una solución habitacional como la de la figura.



Si calculamos el área de la figura tendremos:

$$\text{Área}= \underbrace{x^2}_{1} + \underbrace{3x}_{2} + \underbrace{4}_{3}$$

La expresión anterior representa a un polinomio, por lo que podremos definir un ***polinomio*** *como la* ***suma o resta*** de monomios ***no semejantes.***

Al referirnos a un polinomio solemos utilizar la siguiente nomenclatura:

- **Término:** Cada uno de los monomios que integra el polinomio.
- **Variable:** La letra sobre la que construimos el polinomio.
- **Grado:** El mayor de los exponentes de los monomios que integran el polinomio.
- **Termino Independiente:** El monomio que no lleva letra o que la variables está elevada a cero.
- **Polinomio Reducido**: Polinomio obtenido después de agrupar los monomios semejantes.
- **Polinomio Ordenado:** Polinomio en el que se han ordenado sus monomios que lo forman, atendiendo a su grado. La ordenación podrá ser de forma creciente o decreciente. Para operar con polinomios es conveniente que estos estén ordenados.
- ***Polinomio Completo****:* Cuando el polinomio tiene todos los términos intermedios desde el de mayor grado hasta el término independiente.
- **Valor numérico de un polinomio.:** Es el valor que adquiere el polinomio, al sustituir en el la variable por un número y realizar las operaciones indicadas.
- ***Raíz de un polinomio:*** Es el valor de la variable que hace que el valor numérico del polinomio sea cero. ***Un polinomio podrá llegar tener tantas raíces reales como indica su grado.***

Los polinomios suelen denominarse por una ***letra mayúscula, colocando entre paréntesis la variable sobre la que se construye.***

Así nos referimos a ***P(x)*** *=* $3x^4+2x^3+1$.

Sabiendo que x es la variable del polinomio, si existiesen más letras las consideraríamos como coeficientes.

Repasemos **con el siguiente ejemplo la nomenclatura dada sobre polinomios.**

Partamos del siguiente polinomio: $\mathbf{5x^3+6x^2-4x^3-12x^4-6x+9x-3x^4+9-5=}$

- **Términos:** El polinomio original está formado por 9 términos.
- **Variable:** El polinomio sólo tiene una variable que la hemos denominado con la letra X.
- **Polinomio Reducido**: Si sumamos los monomios semejantes el polinomio quedaría como: $\mathbf{x^3+6x^2-15x^4+3x+4=}$ **donde ha pasado de tener 9 términos a quedarse con 6.**
- **Grado:** El polinomio es de **grado 4**. El mayor de los exponentes de los monomios que integran.
- **Termino Independiente:** El 4 es el término que no depende de x, pues sería el coeficiente del monomio de grado cero. $\mathbf{4.x^0}$ y si recordamos cualquier potencia elevada al exponente cero, tiene como valor uno.
- **Polinomio Ordenado:** $\mathbf{-15x^4+x^3+6x^2+3x+4=}$
- ***Polinomio Completo:*** Nuestro polinomiio es completo pues tiene todos los monomios desde el grado 4 hasta el grado cero.
- **Valor numérico de un polinomio.:** Llamemos a nuestro polinomio P. Por tanto $\mathbf{P(x)=-15x^4+x^3+6x^2+3x+4}$
  Nos interesa saber cuánto vale el polinomio cuando la variable x tome el valor de dos.

  $\mathbf{P(x=2)=-15(2)^4+(2)^3+6(2)^2+3(2)+4=-15(16)+(8)+6(4)+3(2)+4=-240+8+24+6+4=-198}$
- ***Raíz de un polinomio:*** Como el polinomio es de grado cuatro y sus coeficientes son números reales, el polinomio podría llegar a tener hasta cuatro raíces que fuesen números reales. Las que faltasen sería raíces de números complejos.

Ejercicio 7

Dada la siguiente expresión algebraica que representa a un polinomio, contesta a las siguientes preguntas:

$$\mathbf{8x^2-5x^3+4x-6x^2+2x-5}$$

- **Cuantos términos tiene.**
- **Cuál es la variable sobre el que se construye:**
- **Grado:**
- **Cuál es el Termino Independiente:**
- **Expresa el Polinomio Reducido**:
- **Nombra y escribe el Polinomio Ordenado:**
- ***¿Es un Polinomio Completo?***
- **Valor numérico del Polinomio cuando x=-1.**
- ***¿Hasta cuantas raíces reales podría tener el polinomio?***

3.1) OPERACIONES CON POLINOMIOS

➤ Producto de un Polinomio por un número.

Consistirá en multiplicar los coeficientes del polinomio por el número dado.

Siendo **P(x)= $2x^3 - 5x^2 + 2x - 3$**. Calcular el polinomio -2 **P(x).**

$$-2.P(x)=(-2.2).x^3 - (-2.5).x^2 + (-2.2).x - (-2.).3 = -4.x^3 + 10.x^2 - 4.x + 6$$

➤ Suma de Polinomios.

La suma de dos o más polinomios será otro polinomio constituido al ***sumar entre sí los monomios semejantes*** *de los polinomios que se suman.*

Calcular la suma de los polinomios: P(x) + Q(x).

P(x)= $2x^3 - 5x^2 + 2x - 3$.

Q(x)= $7x^2 - 5x^3 - 2x - 4$

Lo primero que haremos es observar si los polinomios están ordenados, si no lo estuviesen los ordenaríamos.

Seguidamente colocamos en columna los monomios semejantes y procedemos a sumar sus coeficientes.

$P(x) \Rightarrow$	$2x^3$	$-5x^2$	$+2x$	-3
$Q(x) \Rightarrow$	$-5x^3$	$+7x^2$	$-2x$	-4
$P(x) + Q(x) =$	$-3x^3$	$+2x^2$		-7

➤ Resta de Polinomios.

La resta de dos polinomios será otro polinomio, obtenido al sumarle al minuendo el ***opuesto del sustraendo****.*

Calcula W(y)-R(y) siendo

W(y)= $5y^3 - 6y^2 + 2y - 3$.

R(y)= $8y^3 - 10y^2 + 10y - 4$.

Primero comprobaremos que los polinomios estén ordenados, si no fuese así los ordenaríamos y reduciríamos si fuese el caso.

La operación que vamos a realizar podemos expresarla como: ***W(y)-R(y)=W(y)+(-1).R(y). Colocaremos los monomios semejantes en la misma columna para proceder a su suma.***

$W(y) \Rightarrow$	$5y^3$	$-6y^2$	$+2y$	-3
$-R(y) \Rightarrow$	$-8y^3$	$+10y^2$	$-10y$	$+4$
$W(y)+(-R(y))=$	$-3y^3$	$+4y^2$	$-8y$	1

➤ Producto de un Monomio por un Polinomio.

Procedimiento:

Se procede multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio. Luego nos encontramos ante multiplicaciones parciales de monomios.

Vamos a calcular el producto del monomio **($-3x^2$)** por le polinomio **P(x)=($2x^2$ + 5x -6)**

Podemos hacer la multiplicación en línea:

($-3x^2$) . P(x)= ($-3x^2$). ($2x^2$)+($-3x^2$)(5x) - ($-3x^2$).(6)=$-6x^4-15x^3+18x^2$

➤ Producto de dos Polinomio.

El resultado será otro polinomio, obtenido al multiplicar todos los términos de uno de los polinomios, por todos los términos del otro y reducir los términos semejantes.

*Calcula el siguiente producto de polinomios: ($2x^2$-3x-5).**(5x-9)*** =

	$2x^2$	$-3x$	-5
		$5x$	-9
$10x^3$	$-15x^2$	-25x	
	$-18x^2$	27x	45
$10x^3$	$-33x^2$	2x	45

Particular importancia tienen una serie de multiplicaciones que agruparemos bajo el epígrafe de productos Notables.

➤ División de un Polinomio por un monomio.

Se divide cada término del polinomio entre el monomio, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Veamos un ejemplo: *Efectúa:* $\dfrac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}$

$$\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}=\frac{2x^4}{-x^2}-\frac{5x^3}{-x^2}+\frac{x^2}{-x^2}=-2x^{4-2}+5x^{3-2}-x^{2-2}=-2x^{4-2}+5x^{3-2}-x^{2-2}$$
$$=-2x^2+5x^1-x^0=\mathbf{-2x^2+5x-1}$$

Veamos otro ejemplo:

Realiza la siguiente división:

$$\frac{4x^3+2x^2-5}{-x^2}$$

$$\frac{4x^3+2x^2-5}{-x^2}=\frac{4x^3}{-x^2}+\frac{2x^2}{-x^2}-\frac{5}{-x^2}=-4x^{3-2}-2x^{2-2}+\frac{5}{x^2}=-2x^1-2x^0+\frac{5}{x^2}=-2x-1+\frac{5}{x^2}$$

➢ División de un Polinomio por otro Polinomio.

Para poder realizar la división entre dos Polinomios, el grado del polinomio ***divisor****, debe de ser menor o igual* ***(≤)*** *que el grado del polinomio* ***dividendo****. Si no fuese así, estaríamos ante una fracción algebraica.*

Dividendo	**divisor**
Resto	**Cociente**

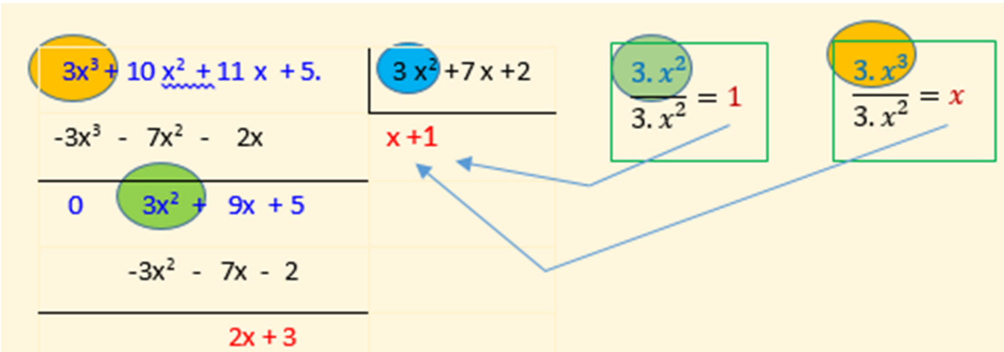
Procedimiento.:

- Se ordenan los polinomios dividendo y divisor según potencias decrecientes.
- Se divide el **primer término del polinomio dividendo**, **por el primer término del divisor** y el resultado es el primer término del cociente.
- Se multiplica el término del cociente por todo el divisor y **el resultado cambiado de signo se le suma al dividendo**, obteniéndose una división parcial.
- Se continúa el proceso hasta obtener un ***dividendo parcial de grado inferior al divisor***, que será el resto.

Veamos un ejemplo. Procedamos a dividir el polinomio P(x) por el polinomio Q(x)

$P(x) = 3x^3 + 10x^2 + 11x + 5.$

$Q(x) = 3x^2 + 7x + 2.$



Si la división está correctamente realizada, deberá verificarse que:

Dividendo = **divisor** * **Cociente** + **Resto.** ⇒ **D=d.C+R**

Por lo que el polinomio **Dividendo** P(x) podemos expresarlo como:

$$P(x) = (3x^2 + 7x + 2).(x + 1) + (2x + 3).$$

Cuando el residuo o resto de la división es cero, diremos que la **división es exacta.**

<u>Ejercicio 8</u>

Siendo:

$Q(x) = (3x^3 – 2x^2 – 4x – 8)$

$P(x) = (x – 2)$

Sin realizar la división Q(x)/P(x) contesta estas preguntas:

a) ¿De qué grado es el polinomio dividendo?
b) ¿De qué grado es el polinomio divisor?
c) ¿De qué grado será el polinomio cociente?

Ejercicio 9

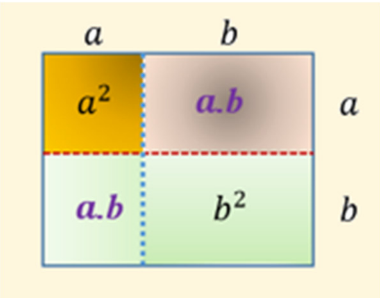
Siendo: $Q(x) = (3x^3 - 2x^2 - 4x - 8)$

$P(x) = (x - 2)$

Realiza la siguiente división Q(x)/ P(x) e indica si la división es exacta o inexacta.

3.2) PRODUCTOS NOTABLES

Son un grupo de identidades algebraicas que aparecen muy frecuentemente en el cálculo.



El cuadrado de una suma. $(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$

(El cuadrado de primer término, más el doble producto de primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término).

A esta expresión se le denomina cuadrado perfecto.

Demostración.

La expresión $(a + b)^2$ es equivalente a $(a + b).(a + b)$, entonces al realizar el producto de los binomios, se obtiene:

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo. Desarrolla $(x + 7)^2$.

Al aplicar la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(x)^2 = x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(x)(7) = 14x$
- El cuadrado del segundo término: $(7)^2 = 49$

Se suman los términos resultantes y se obtiene: $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

Otro ejemplo. Desarrolla $(-2x -3y)^2=$

Al aplicar la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(-2x)^2 = 4x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(-2x)(-3y) = 12xy$
- El cuadrado del segundo término: $(-3y)^2 = 9y^2$

Se suman los términos resultantes y se obtiene: $(x + 7)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

- ***El cuadrado de una diferencia.*** ***$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a.b + b^2$***

(El cuadrado de primer término, menos el doble producto del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término).

Demostración.

La expresión $(a - b)^2$ es equivalente a $(a- b).(a - b)$, entonces al realizar el producto de los binomios, se obtiene:

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo. ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(4x^4 - 9y^3)^2$?

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$(4x^4 - 9y^3)^2 = (4x^4)^2 - 2(4x^4)(9y^3) + (9y^3)^2 = 16x^8 - 72x^4y^3 + 81y^6$

- ***Suma por Diferencia. Binomios conjugados.*** **$(a + b).(a-b) = a^2 - b^2$**

(El cuadrado de primer término menos el cuadrado del segundo término).

Demostración.

Al realizar el producto a $(a+b).(a - b)$, los dobles productos se anulan quedando los cuadrados de los términos.

$$(a+b).(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Ejemplo. Resuelve $(-2x^3 + 7)(-2x^3 - 7)$.

Ambos términos se elevan al cuadrado:

El cuadrado del término que no cambia de signo: $(-2x^3)^2 = 4x^6$

El cuadrado del término que cambia de signo: $(7)^2 = 49$

Finalmente, se realiza la diferencia y el resultado es: $4x^6 - 49$

- ***Trinomio de una suma*** ***.$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a.b + 2ac + 2bc$***

(El cuadrado del primer término más el cuadrado del segundo término más el cuadrado del tercer término. Más el doble producto del primer término por el segundo y tercer término. Mas el doble producto del segundo término por el tercero).

Demostración.

La expresión $(a + b + c)^2$ es equivalente al producto $(a + b + c)(a + b + c)$, entonces:

$(a + b + c)^2 = (a + b + c).(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$

Al simplificar los términos semejantes: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ejemplo. Desarrolla $(x + 2y + 3z)^2$.

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$(x + 2y + 3z)^2 = (x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2(x)(2y) + 2(x)(3z) + 2(2y)(3z)$

$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$

• ***El cubo de un binomio.***

Su desarrollo es un polinomio de cuatro términos al que se llama cubo perfecto y se forma con la suma de los cubos de los términos primero y segundo, más los triples productos del cuadrado del primero por el segundo, más el producto del primero por el cuadrado de segundo.

Demostración: La expresión $(a + b)^3$ es equivalente al producto $(a + b)^2(a + b)$, entonces:

$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ejemplo. Desarrolla el siguiente binomio $\mathbf{(x – 4)^3}$**:**

El binomio se expresa de la siguiente manera: $(x – 4)^3 = (x + (– 4))^3$, se obtiene cada uno de los términos del cubo perfecto:

– El cubo del primer término: $(x)^3 = x^3$

– El cubo del segundo término: $(– 4)^3 = – 64$

– El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(x)^2(– 4) = – 12x^2$

– El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(x)(–4)^2 = 3(x)(16) = 48x$

Finalmente, el desarrollo es: $(x – 4)^3 = x^3 – 12x^2 + 48x – 64$

• ***Producto de dos binomios que tienen un término común.***

Su resultado es un trinomio cuyo desarrollo lo forma el cuadrado del término común, más el producto del término común por la suma de los términos no comunes, más el producto de los no comunes.

$\mathbf{(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b) x + ab}$

Demostración: Se realiza el producto de los binomios: $(x + a) (x + b) = x^2+ ax + bx + ab$

Se agrupan los términos semejantes y se obtiene la fórmula:

$(x + a) (x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$

Ejemplo. Desarrolla $\mathbf{(x – 6) (x + 4)}$**.**

Calculamos los diferentes términos:

- El cuadrado del término común: $(x)^2 = x^2$
- La suma de los términos no comunes, multiplicada por el término común: $(– 6 + 4).(x) = – 2x$
- El producto de los términos no comunes: $(– 6)(4) = – 24$
- Se suman los términos anteriores y se obtiene como resultado: $(x – 6).(x + 4) = x^2 – 2x – 24$

Ejercicio 10

Deduce la identidad matemática de la siguiente expresión algebraica: $\left(\frac{1}{2}\cdot a+3\right)^2 =$

Ejercicio 11

Desarrolla $\mathbf{(-2m-3n)^3}$

3.3) DIVISIÓN POR RUFFINI. TEOREMA DEL RESTO. TEOREMA DEL FACTOR.

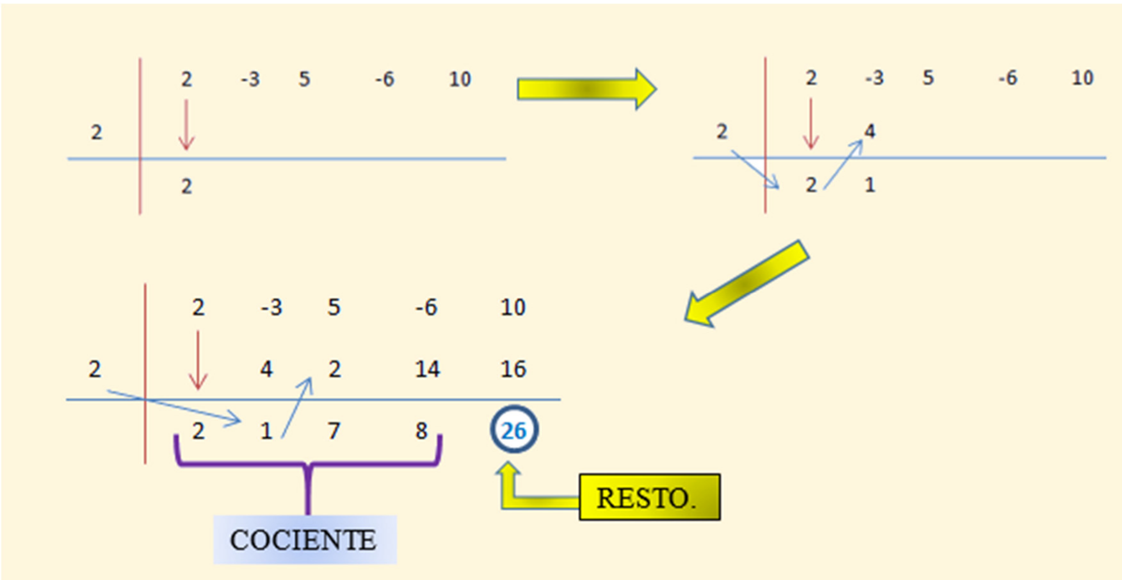
La regla de Ruffini permite hallar el cociente y el resto que se obtendría en la división de un polinomio P(x), por un binomio de primer grado **(x-a)** sin necesidad de efectuar la división de manera convencional.

Como veremos más adelante, la utilizaremos para determinar las raíces enteras que pueda tener un polinomio de grado mayor que dos.

Procedimiento

1) Se deben colocar todos los coeficientes del polinomio dividendo, ordenados de mayor a menor grado y, si falta algún término (polinomio no completo) será porque el coeficiente de dicho monomio es cero.
2) Se escribe el primer coeficiente debajo de la línea horizontal, a la izquierda se coloca el coeficiente independiente del binomio divisor **cambiado de signo**.
3) Se multiplica el término de la izquierda por el primer coeficiente del polinomio dividendo y el resultado se le suma al segundo coeficiente del polinomio dividendo.
4) Se repite el proceso hasta llegar al final.

Dado el polinomio $P(x)=2x^4 -3x^3 + 5x^2 – 6x+10$, realizar la división por Ruffini por el binomio (x-2)



Donde el polinomio cociente es   y el resto **26**. Por tanto podremos decir que:

$$P(x)=2x^4 -3x^3 + 5x^2 – 6x+10 =$$

Que es una forma de descomponer el polinomio P(x).

Ejercicio 12

Realiza utilizando la regla de Ruffini la división del polinomio $2x^3+3x-2$ por el binomio (x-3):

3.3.a) TEOREMA DEL RESTO

En la división por el método de Ruffini, el resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio (binomio) de la forma **(x-a)**, representa el valor numérico que tomaría dicho polinomio para el valor: **x = a.**

P(x=a) = Resto de la división de Ruffini.

En el ejemplo anterior vimos que al dividir el polinomio $P(x)=2.X^4 -3.X^3 + 5.X^2 – 6.X +10$ por el binomio (X – 2).

El **cociente** resulto ser el polinomio de un **grado inferior al polinomio dividendo.** $C(x) = 2.X^3 + X^2 + 7.X + 8$ y el Resto: 26.

Luego P(x=2) = 26

Calcular por el teorema del resto, el valor numérico del polinomio $P(x)=x^4-3x^2+2$ cuando el valor de la variable sea x = 3.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

Vamos a comprobamos la solución por sustitución directa del valor en el polinomio:

$P(x=3) = 3^4– 3.3^2 + 2 = 81 – 27 + 2 =$ **56**

Ejercicio 13

Aplicando el teorema del factor, determina cual es el valor del polinomio:

$P(x)=3x^3-7x^2+3x-7$, cuando x=-2.

3.3.B) TEOREMA DEL FACTOR

Si al dividir un polinomio P(x) por un binomio **(x-a)** el resto de dicha división fuera cero (división exacta) diremos que el valor de **“a”** en una raíz de dicho polinomio. **P(x=a)= 0**

- Cuando el polinomio tiene coeficientes reales, ocurre que las raíces **enteras** de dicho polinomio (si existen) son números que a su vez son **divisores** del término independiente del polinomio en cuestión.
- Si **x=n/m** es una raíz fraccionaria de un polinomio de coeficientes reales, se cumplirá que **n** es un divisor del término independiente mientras que **m** será un divisor del término de mayor grado.
- Con cada raíz podemos formar un binomio de la forma **(x-raíz)** que diremos que es un divisor del polinomio dado y le denominaremos factor del polinomio.
- Un polinomio de coeficientes enteros cuyo término de mayor grado sea 1, no tendrá raíces fraccionarias.

Veamos un ejemplo.

Determinar las raíces del polinomio $P(x) = x^2 – 5x + 6$.

Recordamos que la raíz de un polinomio es el número que toma la variable (x=a) que hace que el valor numérico del polinomio sea cero. **P(x=a)=0**

- Como el coeficiente del término de mayor grado es 1, el polinomio no tendrá raíces fraccionarias.
- Primero vamos a determinar las raíces del polinomio, como hemos dicho en el teorema del factor, estas si existen serán divisores del término independiente.

Los divisores del seis son: 1,-1, 2, -2, 3 y -3

La búsqueda de la raíz la hacemos tanteando hasta encontrar algún valor entre los dados que haga P(x)=0. Para este fin vamos a utilizar la regla de Ruffini de manera recursiva.

Utilizando la regla de Ruffini obtenemos las siguientes tablas

	1	-5	6
1		1	-4
	1	-4	2
	cociente		resto

	1	-5	6
-1		-1	6
	1	-6	12
	cociente		resto

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0
	cociente		resto

	1	-5	6
-2		-2	14
	1	-7	20
	cociente		resto

	1	-5	6
3		3	-6
	1	-2	0
	cociente		resto

	1	-5	6
-3		-3	24
	1	-8	30
	cociente		resto

Por tanto las raíces del polinomio son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$, con ellas podremos formar dos binomios: **(x-2) y (x-3) ,** y con los binomios podemos factorizar el polinomio, el cual quedaría como:

P(x)= (x-2) * (x -3)

Observación: hay polinomios que no pueden descomponerse debido a que no tiene raíces Reales. En estos casos se dice que el polinomio es irreducible.

Ejercicio 14

Comprueba utilizando el teorema del factor si el binomio (x-3) es un factor del polinomio $Q(x)=x^3-3x^2-4x+12$

3.4) FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO

Al igual que un número compuesto podemos descomponerlo en los factores primos que lo generan. Un polinomio puede expresarse como el producto de los binomios de sus raíces, que le llamaremos factores. A la identidad matemática resultante se le denomina factorización del polinomio.

D*ado un polinomio* ***P(x)****, dicho polinomio* podrá *expresarse como el producto del coeficiente del término de mayor grado del polinomio, por todos los binomios* ***(x-raíz)*** *que tenga.*

Veamos este ejemplo:

Factorizar el polinomio **$P(x) = x^2 - 5x + 6$.**

Sabemos que el polinomio no tendrá raíces fraccionarias pues el coeficiente del término de mayor grado es 1 y además sabemos que por ser de segundo grado puede tener dos raíces, que si fuesen números enteros serían los divisores del término independiente del polinomio, es decir, de 6.

Divisores de 6={±1,±2,±3,±6}

$P(x=1) = 1-5+6=2\neq0$. Luego x= 1 no es raíz.

$P(x=-1) = 1+5+6=12 \neq0$. Luego x= -1 no es raíz.

$P(x=2) = 4-10+6=0$. Luego x=2 es una raíz del polinomio.

$P(x=-2) = 4+10+6=20 \neq0$. Luego x= -2 no es raíz.

$P(x=3) = 9-15+6=0$. Luego x=3 es una raíz del polinomio.

Por tanto el polinomio factorizado quedaría como: **$P(x) = x^2 - 5x + 6= (x-2).(x-3)$**

Ejercicio 15

Factoriza el polinomio $P(x)= x^3-4x^2+x+6$ compuesto de raíces enteras.

4) ECUACIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

Un matemático a destacar en el estudio de las expresiones algebraicas de primer grado es Evariste Galois (1811-1832).

Las llamaremos expresiones polinómicas de primer grado porque su exponente es uno y como ocurría con los polinomios nos dedicaremos a estudiar el valor de sus raíces, aunque ahora las llamaremos soluciones.

4.1) IGUALDADES: IDENTIDADES Y ECUACIONES

Una igualdad es una expresión algebraica en la que aparece el símbolo de igualdad. ⇒ **=**

Las igualdades pueden ser: identidades y ecuaciones.

- Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas ***que es cierta*** para cualquier valor de las variables que intervienen.

  Las identidades sirven para transformar expresiones algebraicas en otras más cómodas de manejar, en los procesos de desarrollo matemático.

  Dos ejemplos de identidades podrían ser:

  $$2x+2=2.(x+1) \quad o \quad x^2+2x+1=(x+1)^2$$

  Y se verifican para cualquier valor que tome la variable x.

  Si x=-1 ⇒ $2x+2=2.(x+1)$ ⇒ 2.(-1) + 2 = 2.(-1+1) ⇒ 0=0

  Si x=3 ⇒ $2x+2=2.(x+1)$ ⇒ 2.(3) + 2 = 2.(3+1) ⇒ 8=8

- Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que sólo es cierta para algunos valores de las incógnitas.

  Los valores que hacen que la igualdad se *verifique* o que sea cierta, se denominan *solución de la ecuación.*

  Una ecuación podrá tener o no tener solución. Cuando tiene solución estas dependen del grado de la ecuación. Así las ecuaciones de primer grado sólo podrán tener una solución, las de segundo grado podrán tener dos, así sucesivamente.

  Ejemplos:

  La ecuación $2x-1=\frac{8}{4}x$ es una ecuación que no tiene solución, pues:

  $2x-\frac{8}{4}x=1$ ⇒ **0.x =1** ⇒ no podremos encontrar un número que multiplicado por cero nos de 1.

  La ecuación $2x-1=\frac{8}{4}x-1$ tiene infinitas soluciones, pues es una identidad.

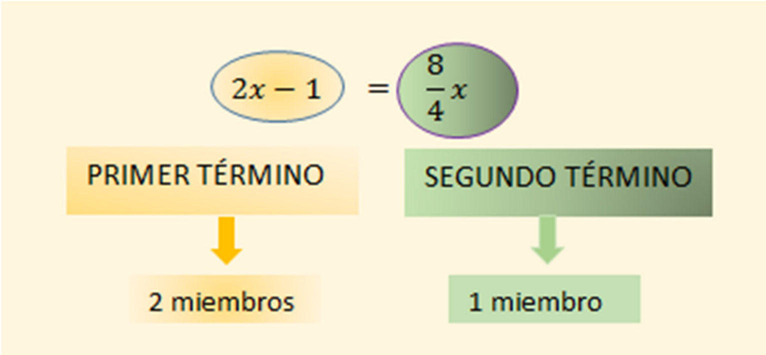
  $2x-\frac{8}{4}x=-1+1$ ⇒ **0.x =0.** Cualquier valor que le demos a x, verifica la ecuación.

  La ecuación **x-25 = 3x-5** tiene una sola solución.

  x -3x =-5+25, -2x=20 ⇒ x = $\frac{20}{-2}=-10$

En ecuaciones hablamos de términos de la ecuación, queriendo hacer referencia a cada uno de los **lados de la igualdad**.

A su vez, cada término estará compuesto por igual o diferente número de miembros.



En las ecuaciones, las letras o variables, representan a los valores de magnitudes desconocidas. El grado de la ecuación si recordamos, será el que le dote el monomio de mayor grado, que tenga como miembro dicha ecuación.

Las ecuaciones que vamos a ver serán ecuaciones de primer grado con una sola variable.

Ejercicio 16

Indica si la igualdad siguiente es identidad o ecuación.

2(x+4) + 3x = 5x + 8 es una ____________________.

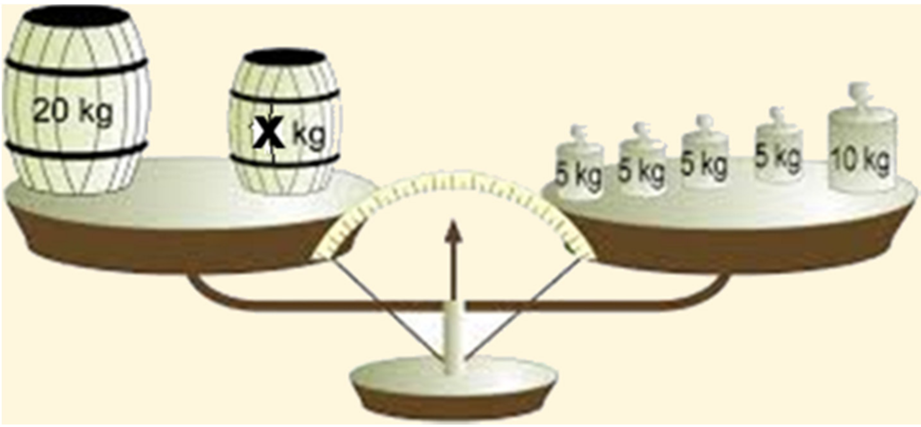
Ejercicio 17

Indica si la igualdad siguiente es identidad o ecuación.

2(x+5) - 3x = x + 10 es una ____________________.

4.2) PROCEDIMIENTO PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Una ecuación se comporta como una balanza en la que mediante pasos intermedios realizados a través de identidades, que generan ecuaciones equivalentes a la de partida, conseguimos dejar la variable aislada en uno de los términos, que en nuestro símil será un platillo de la balanza.



Las transformaciones que podemos hacer en una ecuación para obtener otras ecuaciones equivalentes son:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número se obtiene una expresión equivalente.

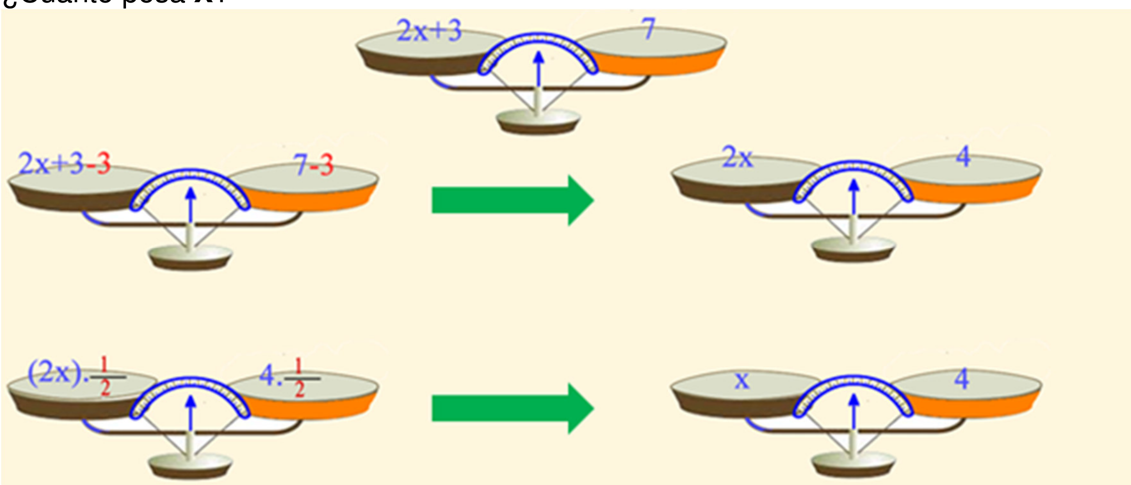
  ⇒**Consecuencia: lo que está sumando en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro restando.**

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismos número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

  ⇒**Consecuencia: lo que está dividiendo en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro multiplicando, y al contrario.**

Veamos un ejemplo gráficamente:

¿Cuánto pesa **X**?



Claramente la solución es **x = 4.**

Veamos otro ejemplo:

Qué solución tiene la ecuación: **20x-14-11x=8-6x+2**

20x-14-11x=8-6x+2	Agrupamos monomios semejantes en cada término de la ecuación.
9x =10-6x	Agrupamos la variable en uno de los términos, sumando un mismo valor en cada uno de los términos.
9x+6x=10-6x+6x	Agrupamos monomios semejantes.
15x=10	Dividimos cada término por el coeficiente que acompaña a la variable.
$15x.\left(\frac{1}{15}\right) = 10.\left(\frac{1}{15}\right)$	Simplificamos.
$x = \frac{10}{15}$	Que es la solución buscada.

Las estrategias que seguiremos para resolver las ecuaciones serán las siguientes:

- Empezaremos quitando los denominadores de las ecuaciones si los hubiese, multiplicando para ello todos los términos de la ecuación por el **m.c.m** de los denominadores o por un múltiplo de este.
- Pondremos cada término o el numerador de la fracción entre paréntesis antes de multiplicarlo por cualquier número.
- Simplificamos las fracciones resultantes.
- Resolveremos los paréntesis con estrategias de dentro a fuera.
- Agruparemos monomios semejantes en cada término.
- Agruparemos las variables en un término y los datos en el otro término.
- Despejamos el coeficiente que multiplique a la variable y trasponemos términos si fuese necesario.

Veamos algunos ejemplos:

a) Resolver la ecuación: **2x-3=6+x**

→ Agrupamos las variables en un término. 2.x-**x**-3= 6+x-**x** ⇒ **x-3=6**

→ Agrupamos monomios semejantes. x-3**+3**=6**+3** ⇒**x=9**

→ Despejamos la variable. **X=9**

b) Resuelve la siguiente ecuación:

$$8x - (6x - 9) + (3x - 2) = 4 - (7x - 8)$$

$$8x - 1.(6x - 9) + 1.(3x - 2) = 4 - 1.(7x - 8).$$

→ Resolvemos los paréntesis al aplicar la propiedad distributiva.

$$8x - 1.(6x) - 1.(-9) + 1.(3x) + 1.(-2) = 4 - 1.(7x) - 1.(-8)$$

$$8x - 6x + 9 + 3x - 2 = 4 - 7x + 8$$

→ Agrupamos monomios semejantes de cada término.

$$5x + 7 = 12 - 7x$$

→ Agrupamos las variables en un término.

$$5x + 7x = 12 - 7$$

$$12x = 5$$

→ Despejamos la variable.

$$x = \frac{5}{12}$$

c) Cuando nos encontramos fracciones quitamos denominadores, como en los ejemplos siguientes:

$\frac{6}{6}.(x-1)$ $\frac{6}{2}.(x-3)$

Resolver la ecuación: $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = 6$

→ Calculamos el $m.c.(6,2) = 6$

→ Multiplicamos todos los miembros de la ecuación por 6. $6.\left(\frac{x-1}{6}\right) - 6.\left(\frac{x-3}{2}\right) = 6.(6)$

→ Simplificamos las fracciones resultantes. $(x-1) - 3.(x-3) = 6.(6)$

→ Desarrollamos paréntesis. $x - 1 - 3x + 9 = 36$

→ Agrupamos monomios semejantes. $-2x + 8 = 36$

→ Separamos variables y términos independientes. $-2x = 36 - 8 \Rightarrow -2x = 28$

→ Despejamos la variable y calculamos su valor. $x = \frac{28}{-2} = -14$

Resolver la ecuación: $x - \frac{x+2}{3} = 6$

→ Calculamos el $m.c.(1,3) = 3$

→ Multiplicamos todos los miembros de la ecuación por 3. $\Rightarrow$ $3.(x) - 3.\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3.(6)$
(No olvidar poner paréntesis a todos los miembros de la ecuación)

→ Simplificamos las fracciones resultantes. $\Rightarrow$ $3.(x) - (x + 2) = 3.(6)$

→ Desarrollamos paréntesis. $3.(x) - x - 2 = 18$

→ Agrupamos monomios semejantes. $\Rightarrow$ $-2x - 2 = 18$

→ Separamos variables y términos independientes. $-2x = 18 + 2$ $\Rightarrow -2x = 20$

→ Despejamos la variable y calculamos su valor. $x = \frac{20}{-2} = -10$
(Recordar que el coeficiente arrastra su signo)

Ejercicio 18

Resuelve la siguiente ecuación: $\frac{3x}{2} + 7 = \frac{4x}{3} + 8$

4.3) ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

En estas ecuaciones la variable se encuentra afecta por el operador absoluto, lo que significa que:

$$|x| = \begin{cases} (-1).x \ \ si \ \ x \ \ es \ \ negativo \ \ (x<0) \\ x \ \ si \ \ es \ \ positivo \ \ (x>0) \end{cases}$$

Si recordamos el operador valor absoluto cuyo símbolo es "||" nos da el cardinal del número, sin tener en cuenta el signo. Por ello el valor absoluto de un número positivo será el mismo número y el valor absoluto de un número negativos será el mismo número escrito en forma positiva.

Por ello para resolver una ecuación con valor absoluto se tiene que si |x|=b , puede ocurrir dos casos:

Caso 1: que x sea positivo de valor b, luego |x|=x=b

Caso 2: que x sea negativo x=**-b**, luego |x|=(-1).x=(-1).(-b)=b

Por tanto al resolver una ecuación con valor absoluto deberemos resolver los dos casos planteados.

Veamos unos ejemplos.

a) Resuelve la ecuación |6-3x|=9

Caso 1: que (6-3x) sea positivo, en cuyo caso resolvemos la ecuación. (6-3x)=9

$$(6-3x)=9;\ -3x=9-6;\ -3x=3\ \Rightarrow\ x=\frac{3}{-3}=-1$$

Caso 2: que (6-3x) sea negativo, en cuyo caso resolvemos la ecuación. (-1).(6-3x)=9.

$$(-1).(6-3x)=9;\ -6+3x=9;\ 3x=9+6;\ 3x=15\ \Rightarrow\ x=\frac{15}{3}=5$$

Luego x=-1 y x=5, hacen que |6-3x|=9

b) Resuelve |3x-1|=2x+5

Caso 1: que (3x-1) sea positivo, en cuyo caso resolvemos la ecuación, (3x-1)=2x+5

$$(3x-1)=2x+5;\ 3x-2x=5+1\ \Rightarrow\ x=6$$

Caso 2: que (3x-1) sea negativo, en cuyo caso resolvemos la ecuación, (-1).(3x-1)=2x+5.

$$(-1).(3x-1)=2x+5;\ -3x+1=-2x=5;\ -3x-2x=5-1;\ -5x=4\ \Rightarrow\ x=-\frac{4}{5}$$

Luego x=6 y x=-4/5 son soluciones de la ecuación.

Ejercicio 19

Resuelva la ecuación: $\left|\frac{x+3}{x}\right|=2$

4.4) RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

La resolución de problemas mediante métodos algebraicos conlleva traducir a lenguaje algebraico la situación que se nos plantea. Para ello es muy útil seguir los siguientes pasos:

1º) Identificar DATOS e INCÓGNITAS.
2º) Asignar una letra (x, y, z…) a cada una de las incógnitas que tengamos.
3º) Si hubiese más de una incógnita, buscar la relación que exista entre ellas.
4º) Establecer la relación que hay entre las incógnitas y los datos.
5º) Resolver la ecuación resultante.
6º) Analizar la lógica del resultado obtenido.

Vamos a ver algún ejemplo.

María tiene 20 años menos que su madre. Dentro de 5 años, María tendrá la mitad de años que su madre. ¿Qué edad tienen cada una actualmente?

1) **Identificar DATOS e INCÓGNITAS.**

Incógnitas:

La edad de madre e hija actualmente.

Los datos:

Los años que tiene María menos que su madre o lo años que su madre tiene más que María.

La relación de años entre madre e hija en el futuro cuando hayan transcurrido cinco años. Que nos dice que la edad de la hija será la mitad que la de la madre.

2) Asignar una letra (x, y, z…) a cada una de las incógnitas que tengamos.

Vamos a llamar **x a la edad de María** e **y a la edad de su madre**.

3) Si hubiese más de una incógnita, buscar la relación que exista entre ellas.

Como nos aparecen dos incógnitas y nosotros tenemos que poner una **ecuación con una sola** incógnita debemos buscar la relación que hay entre la incógnitas x e y.

La relación la encontramos sabiendo que las edades de madre e hija se diferencian en 20 años. Por tanto la relación buscada podría ser: **x=y-20**

4) Establecer la relación que hay entre las incógnitas y los datos.

Para este propósito una tabla como la siguiente nos puede ayudar.

	Hoy	Dentro de 5 años.
Edad de María	**x**	x+5
Edad de su madre.	**y** → y=20+x	**y+5** → (20+x)+5

5) Resolver la ecuación resultante.

La primera columna ya la hemos utilizado para establecer la relación entre x e y. Luego ahora tendremos que utilizar la relación entre los números de la segunda columna.

$$x+5=\frac{(20+x)+5}{2}$$

Luego:

$$x+5=\frac{((20+x)+5)}{2} \Rightarrow 2.(x+5)=2.(\frac{(20+x)+5}{2}) \Rightarrow 2x+10=25+x$$

$$2x-x=25-10 \Rightarrow Portanto \ x=15$$

Luego la edad de María es de 15 años y la de su madre veinte años más, es decir, 35 años.

6) Analizar la lógica del resultado obtenido.

El resultado no contradice la lógica, la edad de la madre debe ser mayor que la edad de la hija.

Ahora nos quedaría comprobar se cumple las dos premisas de la columna:

¿es 35 igual a 15 más veinte? Pues sí.

¿es 15 más 5 la mitad de 35 más 5? Pues la respuesta es si. Por tanto damos como bueno el resultado obtenido.

Ejercicio 20

Un automóvil con velocidad constante de 21 m/s parte 5 segundos después que un automóvil, cuya velocidad es de 18 m/s, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que el segundo alcance al primero?

En este tipo de problemas que representa al movimiento rectilíneo uniforme se utilizan las siguientes relaciones entre los conceptos, velocidad, espacio y tiempo:

Es también muy aconsejable la realización de un esquema que nos sirva de orientación y sobre el que se expliciten los datos y las incógnitas.

5) AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 21

¿Cómo expresaría algebraicamente el siguiente enunciado?:

La suma de tres números enteros pares consecutivos.

	6n+3=
	n+(n+1)+(n+2)=
	2n+(n+1)+(n+2)=

Ejercicio 22

Indica cual es el grado del siguiente monomio: -25 ⇒ -5^2

	El monomio es de grado 2
	El monomio no tiene grado
	El monomio es de grado cero

Ejercicio 23

El producto de los siguientes monomios $(4\,a\,x^4\,y^3) \cdot (x^2\,y) \cdot (3\,a\,b^2\,y^3)$ es:

	$12\ ab^2x^6y^3$
	$12\ a^2\ b^2\ x^4\ y^7$
	$12\ (a\ b)^2\ x^6\ y^7$

Ejercicio 24

¿Cuál de las siguientes expresiones representa a un polinomio?

	$\frac{X^2+6X-1}{2}$
	$\frac{X^2+6X-1}{2.x}$
	Las dos respuestas anteriores son correctas.

Ejercicio 25

Dados los polinomios indicados, el valor de la siguiente ecuación polinómica R(x)+Q(x)-2.P(x)= será:

P(x)=x4+2x2+1

Q(x)=2x4+2x3+2

R(x)=-2x3+4x2

	$S(x)=2x^3+x^2+4$
	$S(x)=0$
	Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

Ejercicio 26

Cuando dividimos el polinomio $P(x)=x^7+x^5+2x+1$ entre el polinomio $Q(x)=x^4+3x^2+5$. Podemos afirmar que el grado de los polinomios: Dividendo, divisor, Cociente y Resto, será:

	D=7; d=4; C=3; R=3
	D=7; d=4; C=4; R=2
	D=7; d=4; C=3; R=2

Ejercicio 27

¿Cuál de los siguientes valores {3,1,0,-3} son raíces del polinomio $Q(m) = m^4 - 18.m^2 + 81$?

	Son raíces los valores {3,1,0,}
	Son raíces los valores {3,-3}
	Son raíces los valores {3,1,0,-3}

Ejercicio 28

¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación de primer grado? $\frac{6(x-1)}{2}-\frac{(x-2)}{3}=6$

	La solución es x=0
	La solución es x=31
	La solución es x=35

Ejercicio 29

Se reparte un lote de juguetes por igual entre 15 niños presentes, pero llega un niño más y hay que dar a cada uno un juguete menos, sobrando 11 juguetes.

¿Cuántos juguetes corresponden a cada niño y cuántos había en total?

	Había 75 juguetes en total y se repartieron 6
	Había 75 juguetes en total y se repartieron 5
	Las dos respuestas anteriores son erróneas

Ejercicio 30

Si a un número se le suma su doble y su triple resulta 90. ¿Cuál es el número?

	El número sería 25
	El número sería el 14
	Las dos respuestas anteriores son incorrectas

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Lenguaje Semántico	Lenguaje Algebraico
Un número cualquiera	x
Un número cualquiera aumentado en siete.	x+7
La diferencia de dos números cualesquiera.	f-g
El doble de un número excedido en cinco.	2x+5
La división de un número entero entre su precedente.	(x+1)/x
La mitad de un número.	x/2
El cuadrado de un número.	y2
Las dos terceras partes de un número disminuido en cinco es igual a 12.	(2x/3)-5=12
Tres números naturales consecutivos.	x, x +1, x +2
El cuadrado de un número aumentado en siete.	x2 + 7
Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a 3.	[(3x/5)+(x+1)/2]=3
El producto de un número positivo con su antecesor equivale a 30.	x.(x –1) = 30
El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número.	x3 + 3x2
Lo que excede 1500 del valor de X	1500-x

Ejercicio 2

Determina el valor numérico de la expresión: $x^4.y^2.z^3$; siendo x = 4, y = 3, z =1/2.

Se sustituyen los respectivos valores de x, y, z y se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor numérico de la expresión:

$$x^4.y^2.z^3 = 4^4.3^2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (256).(9).\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2304}{8} = 288$$

Ejercicio 3

Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica:

$$\frac{5x2}{3}-\frac{2.x.y}{5}+\frac{y}{3x}=$$

Siendo el valor de las variables: x=2; y=1/4

Se sustituyen los respectivos valores de x, y, z se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor numérico de la expresión:

$$\frac{5x2}{3}-\frac{2.x.y}{5}+\frac{y}{3x}=\frac{5(2)^2}{3}-\frac{2.(2).(\frac{1}{4})}{5}+\frac{(\frac{1}{4})}{3(2)}=\frac{20}{3}-\frac{\frac{4}{4}}{5}+\frac{(\frac{1}{4})}{6}=\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{(\frac{1}{4})}{6}=\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{24}$$

Convertimos las fracciones en otras equivalentes con el mismo denominador, podemos elegir como tal al mcm(3,5,24)=120.

$$\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{24}=\frac{800}{120}-\frac{24}{120}+\frac{5}{120}=\frac{781}{120}$$

Por tanto, el valor numérico de la expresión es igual a: 781/120

Ejercicio 4

Completa la tabla.

Monomio	Coeficiente	Variable	Grado
$3.axy^2$	**3**	**a,x,y**	4
$-5.z^3$	-5	z	3
-4x	**-4**	**x**	**1**
$x^3.y^3$	1	**x,y**	6
5	5	**Cualquiera**	0

Ejercicio 5

Indica cuales de los siguientes monomios son semejantes.

a) $2x^3$	b) $4x^4$	c) $-6x^2$	d) $\frac{4}{5}x^3$
e) $-2x$	f) $-\frac{1}{2}x^2$	g) $\frac{4}{5}x^3$	h) $-10x^4$

☐	Son semejantes: • b,h • a,d,g • c,f,e
X	Son semejantes: • b,h • a,d,g • c,f
☐	Son semejantes: • b,h,f • a,d,g • c,f

Ejercicio 6

Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $2x^3-7x^3+x^3$ = $2x^3-7x^3+x^3= 2x^3-7x^3+x^3 = -4x^3$

b) $\frac{4}{3}x^2(-2x)=$ $\frac{4}{3}\cdot(x^2).(-2x)=-\frac{8}{3}x^3$

c) $\frac{2}{4x^6}\cdot(x^7)=$ $\frac{2}{4x^6}\cdot(x^7)=\frac{1}{2}x$

Ejercicio 7

Dada la siguiente expresión algebraica que representa a un polinomio, contesta a las siguientes preguntas:

$$8x^2-5x^3+4x-6x^2+2x-5$$

- **Cuantos términos tiene.**
- **Cuál es la variable sobre el que se construye:**
- **Grado:**
- **Cuál es el Termino Independiente:**
- **Expresa el Polinomio Reducido**:
- **Nombra y escribe el Polinomio Ordenado:**
- ***¿Es un Polinomio Completo?***
- **Valor numérico del Polinomio cuando x=-1.**
- ***¿Hasta cuantas raíces reales podría tener el polinomio?***

- **Cuantos términos tiene.** Tiene seis monomios, luego seis términos.
- **Cuál es la variable sobre el que se construye:** El polinomio solo tiene una variable, que le hemos denominado x

• **Grado:**	El grado del polinomio es 3, por ser este el grado del mayor de los monomios que lo forman.
• **Cuál es el Termino Independiente:**	El término independiente es el 5, aquél monomio que no está explicita la variable, por estar esta elevada al exponente cero, (x^0)
• **Expresa el Polinomio Reducido:**	Al agrupar los monomios semejantes la expresión algebraica quedaría como: **$2x^2-5x^3+6x-5$**
• **Nombra y escribe el Polinomio Ordenado:**	Podemos ponerle el nombre de Q y entonces diríamos: $Q(x)=-5x^3+\mathbf{2x^2+6x-5} =$
• ***¿Es un Polinomio Completo?***	Si porque tiene todos los grados desde el mayor 3 hasta el menor 0
• ***Valor numérico del Polinomio cuando x=-1.***	Sustituyendo la variable y realizando las operaciones indicadas obtendríamos que: $Q(x=-1)=-5x^3+\mathbf{2x^2+6x-5 = =-5(-1)^3+2(-1)^2+6(-1)-5 =-14}$
• ***Hasta cuantas raíces reales podría tener el polinomio.***	Como el polinomio es de grado 3 podría llegar a tener hasta tres raíces reales.

<u>Ejercicio 8</u>

Siendo:

$Q(x) = (3x^3 – 2x^2 – 4x – 8)$

$P(x) = (x – 2)$

Sin realizar la división Q(x)/P(x) contesta estas preguntas:

a) ¿De qué grado es el polinomio dividendo?

b) ¿De qué grado es el polinomio divisor?

c) ¿De qué grado será el polinomio cociente?

a) ¿De qué grado es el polinomio dividendo? **El grado de Q(x) es 3.**

b) ¿De qué grado es el polinomio divisor? **El grado de P(x) es 1.**

c) ¿De qué grado será el polinomio cociente? **El polinomio cociente será de grado 2** (3-1).

Ejercicio 9

Siendo:

$Q(x) = (3x^3 – 2x^2 – 4x – 8)$

$P(x) = (x – 2)$

Realiza la siguiente división Q(x)/ P(x) e indica si la división es exacta o inexacta.

Dividendo	$3x^3 – 2x^2 – 4x – 8$	$x – 2$	$3x^3$	$= 3x^2$	Términos del Cociente.
	$-3x^3 +6x^2$	$3x^2$	x		
Dividendo parcial	$4x^2– 4x – 8$		$4x^2$	$= 4x$	
	$- 4x2+ 8x$	$+4x$	x		
Dividendo parcial	$4x – 8$		$4x$	$= 4$	
	$- 4x + 4$	$+4$	x		
Resto	0				

Como el resto de la división es cero, la división es exacta.

Ejercicio 10

Deduce la identidad matemática de la siguiente expresión algebraica: $\left(\frac{1}{2}\cdot a+3\right)^2 =$

Nos encontramos ante un cuadrado perfecto, luego al aplicar la regla general calcularemos:

- El cuadrado del primer término: $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}a^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2.(\frac{1}{2}\cdot a).(3)$
- El cuadrado del segundo término: $(3)^2 = 9$

Se suman los términos resultantes y se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot a+3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 +2.(\frac{1}{2}\cdot a).(3)+3^2 = \frac{1}{4}a^2+3a+9$$

Ejercicio 11

Desarrolla $(-2m-3n)^3$

Debes calcular:

– El cubo del primer término:

– El cubo del segundo término:

– El triple del cuadrado del primero por el segundo:

– El triple del primero por el cuadrado del segundo:

Finalmente, el desarrollo es:

$$(-2m-3n)^3 = \left[(-2m)+(-3n)\right]^3 = -8.m^3-27.n^3+36.m^2.n+54.m.n^2$$

Ejercicio 12

Realiza utilizando la regla de Ruffini la división del polinomio $2x^3+3x-2$ por el binomio (x-3):

Colocamos los coeficientes del polinomio completo. Si falta alguno de los término es porque su coeficiente es cero.

	2	0	3	-2
3		6	18	63
	2	6	21	61
		cociente		resto

Luego podríamos decir que:

$2x^3+3x-2 = (x-3).\ (2x^2+6x+21)+61$

Ejercicio 13

Aplicando el teorema del factor, determina cual es el valor del polinomio:

$P(x)=3x^3-7x^2+3x-7$, cuando $x=-2$.

Realizando la división por la regla de Ruffini, el valor de P(x=-2) será el resto de la división de P(x) por el binomio [x-(-2)]

	3	-7	3	-7
-2		-6	26	-58
	3	-13	29	-65
		cociente		resto

Luego P(x=-2)=-65

Ejercicio 14

Comprueba utilizando el teorema del factor si el binomio (x-3) es un factor del polinomio $Q(x)=x^3-3x^2-4x+12$

Si el binomio (x-3) es un factor del polinomio Q(x), significa que x=3 será una raíz del polinomio, por tanto el resto de la división por la regla de Ruffini será cero.

	1	-3	-4	12
3		3	0	-12
	1	0	-4	0
		cociente		resto

Como el resto es cero, significa que x=3 es raíz del polinomio y por tanto (x-3) será un factor de dicho polinomio.

Ejercicio 15

Factoriza el polinomio P(x)= x^3-4x^2+x+6 compuesto de raíces enteras.

Factorizar un polinomio consiste en descomponerlo como producto de sus factores, es decir, (x-raiz).

- como el coeficiente de mayor grado es uno, el polinomio no tendrá raíces fraccionarias.
- los números candidatos a raíces serán los divisores del término independiente.

Divisores del número 6={±1,±2,±3,±6}

Si utilizamos la regla de Ruffini tanteando dichos números buscando las divisiones de resto cero nos quedaría:

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	0

X=-1 es una raiz.

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0

X=2 es una raiz.

	1	-3
3		3
	1	0

X=3 es una raiz.

Ejercicio 16

Indica si la igualdad siguiente es identidad o ecuación.

2(x+4) + 3x = 5x + 8 es una ___*identidad*___.

Le damos a **x** un valor cualquiera; por ejemplo **x = 1** y lo sustituimos en la igualdad:

2(1+4) +3·1 = 5·1 +8

2·5 + 3 = 5 + 8

13 = 13. Se cumple.

Probamos con otro valor; por ejemplo x = 2 y repitiendo el procedimiento debemos llegar a que 18 = 18, que también es verdad. Así pues debemos sospechar que estamos ante una identidad.

Si operamos en el miembro de la izquierda vemos que nos sale:

2(x+4) + 3x = 2x + 8 + 3x = 5x + 8,

que es el miembro de la izquierda. Por tanto, la igualdad es cierta sea cual sea el valor de x. Por tanto, la igualdad es una identidad.

Ejercicio 17

Indica si la igualdad siguiente es identidad o ecuación.

2(x+5) - 3x = x + 10 es una ___*ecuación*____.

Actuamos igual. Le damos un valor a una de las incógnitas, por ejemplo, **x = 1**

$$2(1+5) - 3\cdot 1 = 1+ 10$$

$$2\cdot 6 - 3 = 11$$

$$9 = 11$$

que en absoluto es verdad. Por tanto, como hemos encontrado un valor de x que no cumple la igualdad, estamos ante una ecuación.

Ejercicio 18

Resolver la siguiente ecuación: $\frac{3x}{2}+7=\frac{4x}{3}+8$

- Multiplicamos todos los miembros de la ecuación por un múltiplo de los denominadores, 2 y 3. El m.c.m(2,3) podría ser uno adecuado.

No olvidar poner entre paréntesis los denominadores de cada término antes de proceder a la multiplicación.

$$6.\frac{(3x)}{2}+6.(7)=6.\frac{(4x)}{3}+\ 6.(8)$$

Simplificamos las fracciones eliminando de esa manera los denominadores.

$$3.(3x)+6.(7)=2.(4x)+\ 6.(8)$$

- Desarrollamos paréntesis. $9x\ +\ 42=\ 8x\ +\ 48$

- Agrupamos la variable en uno de los términos y los datos en el otro miembro de la ecuación.

$$9x\ +\ 42\ -42\ =\ 8x\ +\ 48-42$$

9*x*+42–42=8*x*+48–42 9x+42–42=8x+48–42

9*x*+42=8*x*+48 9x+42=8x+48

$$9x\ =\ 8x\ +\ 48-42$$

9*x*=8*x*+48–42 9x=8x+48–42

$$9x\ -\ 8x\ =\ 8x\ -\ 8x\ +\ 48-42$$
$$9x\ -\ 8x\ =\ 48-42$$

Agrupamos monomios semejantes obteniendo la solución. **x=6**

Ejercicio 19

Resuelva la ecuación: $\left|\frac{x+3}{x}\right|=2$

Tendremos que resolver dos situaciones:

$\frac{x+3}{x}=2$	$-\left(\frac{x+3}{x}\right)=2$
x+3=2x 3=2x-x	$\left(\frac{x+3}{x}\right)=-2$ x+3=-2x x+2x=-3 3x=-3
Solución x= 3	Solución x= -1

Ejercicio 20

Un automóvil con velocidad constante de 21 m/s parte 5 segundos después que un automóvil, cuya velocidad es de 18 m/s, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que el segundo alcance al primero?

En este tipo de problemas que representa al movimiento rectilíneo uniforme se utilizan las siguientes relaciones entre los conceptos, velocidad, espacio y tiempo:

Es también muy aconsejable la realización de un esquema que nos sirva de orientación y sobre el que se expliciten los datos y las incógnitas.

¿Qué tiene en común las dos situaciones? Pues el punto de salida y el punto de alcance, es decir, la distancia recorrida por cada coche es la misma.

$$V_1.t_1=V_2.t_2$$

Pero el tiempo que tarda en llegar al punto de alcance el coche uno es cinco segundos más que el coche dos, luego: $t_1=t_2+5$

Resultando la siguiente ecuación: $V_1.(t_2+5)=V_2.t_2$

Sustituyendo los valores de las variables conocidas resulta: $18.(t_2+5)=21.t_2$

$18.5+18.t_2=21.t_2 \Rightarrow 90=21.t_2-18.t_2 \Rightarrow 90=3.t_2 \Rightarrow$ Por tanto $t_2=\frac{90}{3}=30\ segundos$

Que será el tiempo que tardará el segundo coche en dar alcance al primero.

Ejercicio 21

¿Cómo expresaría algebraicamente el siguiente enunciado?:

La suma de tres números enteros pares consecutivos.

X	6n+3=
	n+(n+1)+(n+2)=
	2n+(n+1)+(n+2)=

Ejercicio 22

Indica cual es el grado del siguiente monomio: -25 ⇒ -5^2

	El monomio es de grado 2
	El monomio no tiene grado
X	El monomio es de grado cero

Ejercicio 23

El producto de los siguientes monomios (4 a x^4 y^3) · (x^2 y) · (3 a b^2 y^3) es:

	12 $ab^2x^6y^3$
X	12 a^2 b^2 x^4 y^7
	12 $(a\ b)^2$ x^6 y^7

Ejercicio 24

¿Cuál de las siguientes expresiones representa a un polinomio?

X	$\frac{X^2+6X-1}{2}$
	$\frac{X^2+6X-1}{2.x}$
	Las dos respuestas anteriores son correctas.

Ejercicio 25

Dados los polinomios indicados, el valor de la siguiente ecuación polinómica R(x)+Q(x)-2.P(x)= será:

P(x)=x4+2x2+1
Q(x)=2x4+2x3+2
R(x)=-2x3+4x2

	S(x)= $2x^3+x^2+4$
X	S(x)= 0
	Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

Ejercicio 26

Cuando dividimos el polinomio $P(x)=x^7+x^5+2x+1$ entre el polinomio $Q(x)=x^4+3x^2+5$. Podemos afirmar que el grado de los polinomios: Dividendo, divisor, Cociente y Resto, será:

	D=7; d=4; C=3; R=3
	D=7; d=4; C=4; R=2
X	D=7; d=4; C=3; R=2

Ejercicio 27

¿Cuál de los siguientes valores {3,1,0,-3} son raíces del polinomio $Q(m) = m^4 - 18.m^2 + 81$?

	Son raíces los valores {3,1,0,}
X	Son raíces los valores {3,-3}
	Son raíces los valores {3,1,0,-3}

Ejercicio 28

¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación de primer grado? $\frac{6(x-1)}{2}-\frac{(x-2)}{3}=6$

	La solución es x=0
	La solución es x=31
X	La solución es x=35

Ejercicio 29

Se reparte un lote de juguetes por igual entre 15 niños presentes, pero llega un niño más y hay que dar a cada uno un juguete menos, sobrando 11 juguetes.

¿Cuántos juguetes corresponden a cada niño y cuántos había en total?

	Había 75 juguetes en total y se repartieron 6
X	Había 75 juguetes en total y se repartieron 5
	Las dos respuestas anteriores son erróneas

Ejercicio 30

Si a un número se le suma su doble y su triple resulta 90. ¿Cuál es el número?

	El número sería 25
	El número sería el 14
X	Las dos respuestas anteriores son incorrectas