Bloque 1. Aritmética y Álgebra

2. Los números enteros

1. Los números enteros

Es el conjunto de los números negativos, el cero y los positivos, y se representan como:

$$\mathbf{Z} = \{...,-5,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4,+5,...\}$$

Los **enteros positivos** se obtienen colocando el signo **+** delante de los números naturales.

Los **enteros negativos** se obtienen colocando el signo **–** delante de los números naturales

NOTA: los números naturales se entienden como si fuesen positivos. Por eso, los números naturales se consideran también enteros (por ejemplo, 0, 1, 2, …), pero no todos los enteros son naturales (los negativos son enteros pero no naturales).

Los números enteros aparecen en muchas situaciones de la vida diaria:

- Para medir la temperatura (+5º, - 7º)
- Los saldos bancarios (2.000 euros, -3.000 euros)
- Para medir altitudes por encima o debajo del nivel del mar.
- Para señalar el número de plantas de un edificio en el ascensor

2. Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta de prescindir del signo. El símbolo que se utiliza para representar el valor absoluto es el número escrito entre barras.

$$|+10| = 10 \qquad |-5| = 5$$

3. Comparación y ordenación de números enteros

Los números enteros tienen un orden. Se cumplen las siguientes reglas:

- Cualquier entero positivo es **mayor que** cualquier entero negativo.
- El 0 es menor que cualquier positivo y mayor que cualquier negativo
- La comparación entre enteros positivos es similar a la comparación de los naturales, y para comparar dos números negativos será mayor el que tenga menor valor absoluto

4. Opuesto de un número entero

Aquellos números que se encuentran a la misma distancia del cero se les llaman **números opuestos.** Tienen el mismo valor absoluto, pero distinto signo.

0p. (4) = 4 0p. (-4) = 4

En conclusión, podemos decir que el opuesto de un número entero es aquel que tiene el mismo valor absoluto pero distinto signo.

5. Suma de números enteros con el mismo signo

Para sumar números enteros de igual signo, se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos.

Date cuenta que:

- La suma de dos números enteros negativos es otro número negativo.
- La suma de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.

Ejemplo:

a.) 5 + 7 = + (+ 5 + 7) = +12

b.) (-3) + (-6) = - (-3 -6) = -9

6. Suma de números enteros con distinto signo

Para sumar números enteros de distinto signo, se toman sus valores absolutos, al mayor valor se le resta el menor y se pone el signo del mayor. Vemos un ejemplo:

a.) -7 + 12 = + 12 - -7 = +12 – 7 = +5

b.) 11 + -16 = - -16 – 11 = -16 -11 = -5

Si lo que tenemos es una suma de varios números enteros de distinto signo, lo que haremos será:

a) Se suman separadamente los números positivos, por un lado y los negativos por el otro.
b) Se suman el número positivo y el número negativo obtenido.

Ejemplo: Vamos a calcular el resultado de esta suma:

(+4) + (-2) + (+3) + (+5) +(-6) = (+12) + (-8) = +4

7. Resta de números enteros

Para restar un número entero, si éste está dentro de un paréntesis, se cambia el signo del número.

- (- 5) – (+ 7) = (- 5) + (- 7) = - 12
- (+ 4) – (- 6) = (+ 4) + (+6) = + 10
- (- 3) – (- 7) = (- 3) + (+7) = + 4

Date cuenta que el **signo (-)** puede tener dos significados:

a) Puede indicar que un número es negativo (signo de número). Ejemplo**: -** 8.
b) Puede indicar una resta (signo de operación).Así, en 14 **–** (**-** 6) el primer signo menos, el que está antes del paréntesis **–**, es de operación (resta), mientras que el segundo **-**, es de número.

En la primera unidad vimos que el paréntesis nos indica qué operaciones tenemos que realizar primero. Para realizar la operación 7 + (5 – 16), lo hacemos así:

a) Primero hacemos la operación indicada dentro del paréntesis.
b) Si delante del paréntesis tenemos un signo **+**, no cambiamos el signo del resultado de efectuar las operaciones del paréntesis.
c) Pero si delante del paréntesis hay un signo **-**, cambiamos de signo el resultado del paréntesis.

Lo mismo ocurre si hay corchete. Por tanto, la operación anterior quedaría así:

7 + (-11) = 7 – 11 = **-4**

Vamos a hacer la misma operación, pero con un signo – delante del paréntesis:

7 - (5 – 16) = 7 – (-11) = 7 + 11 = **+18**

8. Multiplicación de números enteros

Para hallar el producto de dos números enteros hay que multiplicar sus valores absolutos. El signo del resultado es positivo cuando ambos números o factores tienen el mismo signo y negativo cuando tienen signos diferentes.

Ejemplos de producto de enteros con el mismo signo:

(+5).(+3) = +15 (-5).(-3) = +15

Ejemplos de producto de enteros con distinto signo:

(+5).(-3) = -15 (-5).(+3) = -15

Se suele recurrir a la siguiente **regla de los signos**:

+	**.**	**+**	=	**+**
-	**.**	**-**	=	**+**
+	**.**	**-**	=	**-**
-	**.**	**+**	=	**-**

9. División de números enteros

Para dividir dos números enteros se dividen sus valores absolutos. El cociente tiene signo positivo si los dos números o factores tienen el mismo signo y signo negativo si tienen diferentes signos.

Se sigue la misma regla de los signos que para el producto.

10. Potencias de números enteros con exponente natural

En la expresión de la potencia de un número consideramos dos partes:

- **La base** es el número que se multiplica por sí mismo
- **El exponente** es el número que indica las veces que la base aparece como factor.

Una potencia se escribe tradicionalmente poniendo el número base de tamaño normal y junto a él, arriba a su derecha se pone el exponente, de tamaño más pequeño.

Para nombrar o leer una potencia decimos primeramente el número base, después decimos lo referente al exponente. Cuando el exponente es 2 se dice “elevado al cuadrado”, cuando el exponente es 3 se dice “elevado al cubo”. En los demás casos se dice “elevado a la cuarta, quinta, sexta… potencia”.

$5^3 = 5.5.5 = 125$

Exponente 3 porque el 5 aparece 3 veces como factor
Base 5: es el número que se multiplica por sí mismo

Se ha convenido que:

- Cualquier número elevado al exponente 1 es igual al mismo número.

$A^1 = a$ $\quad\quad$ $3^1 = 3$

- Cualquier número elevado al exponente 0 es igual a 1.

$A^0 = 1$ $\quad\quad$ $3^0 = 1$

11. Producto de potencias de la misma base

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes. $a^m.a^n = a^{m+n}$

Ejemplos: $5^3.5^4 = 5^7$ $\quad$ $7^8.7^9 = 7^{17}$

12. Cociente de potencias de la misma base

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes. $a^m:a^n = a^{m-n}$

Ejemplos: $4^6:4^2 = 5^4$ $\quad$ $5^{12}:5^8 = 5^4$

13. Potencia de exponente negativo

Una potencia de exponente negativo equivale al inverso de esa potencia con exponente postivo. Es decir:

Ejemplos: $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$

Un ejemplo con números puede ser: $7^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$

Fíjate que: $\dfrac{7^4}{7^7} = \dfrac{7.7.7.7}{7.7.7.7.7.7.7} = \dfrac{1}{7.7.7} = \dfrac{1}{7^3}$; y que, por otro lado, al ser un cociente de

potencias: $\dfrac{7^4}{7^7} = 7^{4-7} = 7^{-3}$

Observa también que: $\dfrac{7^5}{7^7} = \dfrac{7.7.7.7.7}{7.7.7.7.7} = 1$; y por otro lado: $\dfrac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0$

Este es el motivo por el que $7^0 = 1$

14. Potencia de base negativa

Al elevar un número negativo a un exponente par el resultado es siempre positivo.
Al elevarlo a un exponente impar, el resultado es siempre negativo.

Ejemplos: $(-5)^4 = (-5).(-5).(-5).(-5) = 625$ El resultado es positivo

$(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$ El resultado es negativo

15. Potencia de otra potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, se déjà la misma base y se multiplicand los exponents. $(a^m)^n = a^{m.n}$

Ejemplos: $(3^2)^4 = 3^8$

Fíjate que: $(3^2)^4 = 3^2 . 3^2 . 3^2 . 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$

16. Potencia de un producto

La potencia de un producto equivale al producto de potencias cuyas bases son cada uno de los factores y cuyo exponente es el mismo. $(a.b)^m = a^m.b^m$

Ejemplos: $(3.5)^4 = 3^4.5^4$

O también: $(3.5)^4 = 15^4$

17. Operaciones combinadas: Jerarquía de operaciones

Si en una operación aparecen sumas, o restas y multiplicaciones o divisiones, el resultado varía según el orden en que se realicen. En matemáticas se establece una jerarquía de operaciones, que va a determinar el orden en el que se realizarán las operaciones.

1º) Si en una expresión aparecen paréntesis, corchetes o llaves, lo primero que hay que realizar son las operaciones que hay dentro de dichos paréntesis, corchetes y llaves (por ese orden)

2º) Las multiplicaciones y divisiones, conforme van apareciendo de izquierda a derecha.

Por ejemplo, en la operación **10 x 2 :5**, primero se haría la multiplicación pues aparece más a la izquierda, quedando 10 x 2 : 5 = 20 : 5 = 4. Sin embargo, en la operación **10 : 2 x 5**, primero se haría la división pues ahora aparece más a la izquierda, con lo que el resultado sería 10 : 2 x 5 = 5 x 5 = 25.

3º) Sumas y restas

Además, las potencias se irán resolviendo sobre aquello a lo que afecten.

Ejemplo:

(3-8) x [4- (6 x 7 :2)] =

(-5) x [4 – (42:2)] =

(-5) x [4 – 21] =

(-5) x (-17) =

+ 85

Ejercicios.

1. Resuelve:

1) $-5-(9-2)=$
2) $7-|9-(4-13)+2|$
3) $5-|6-2-(1-7)-3|$
4) $1-(5-2+3)-|4-(6-4+2)-5|=$
5) $13-[8-(6-3)-4.3]:(-7)=$
6) $48:[5.3-2.(6-10)-17]=$
7) $3.4-15:[12+4.(2-7)+5]=$

2. Si “n” es un número entero, señala en cada caso cuál es la solución que corresponde a las siguientes expresiones:

1)	$n^6.n^3.n=$	a) n^8	b) n^{10}	c) n^9
2)	$n^5:n^2=$	d) n^3	e) n^7	f) n^5
3)	$n^3:n=$	g) n^3	h) n^4	i) n^2
4)	$(n^3)^5=$	j) n^3	k) n^{15}	l) n^8

3. Señala en cada caso cuál es la solución que corresponde a las siguientes expresiones:

1) $5^{-4}=$	a) 5^4	b) $\frac{1}{5^{-4}}$	c) $\frac{1}{5^4}$
2) $-2^3=$	a) -8	b) 8	c) -6
3) $-3^2=$	a) -9	b) 9	c) -6
4) $(4.5)^3=$	a) 60	b) 8000	c) 20

4. De una finca de 24 ha se vende la tercera parte a razón de 2 euros el m^2 y el resto a 20 euros el área. ¿Cuánto se obtiene por la venta?

5. Un constructor compra una parcela de 5 hectáreas que le cuesta 2.500.000 €. Se gasta 1.200.000 € en urbanizarla y pierde 1 hectárea entre calles y aceras. El terreno que le queda lo divide en 25 parcelas. Si quiere ganar 2.300.000 €, ¿a qué precio tiene que vender el metro cuadrado de parcela?

6. Escribe V o F a continuación de la siguiente afirmación para decir si es verdadera o falsa:

Queremos meter el contenido de una garrafa de media arroba (1 arroba = 16 litros) de vino en botellas de ¾ de litro. Por tanto necesitaremos 12 botellas

7. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $4 + 5 \cdot (6 - 4) + 8 : 2$
b) $4 + 5 \cdot 6 - 4 + 8 : 2$
c) $(4 + 5) \cdot 6 - (4 + 8) : 2$
d) $4 + (5 \cdot 6 - 4 + 8) : 2$

8 . Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
a) Si dos números enteros son negativos, el mayor de ellos es el que está más alejado del cero.
b) Dados dos números enteros, uno positivo y otro negativo, el mayor es siempre el positivo.
c) El cero es mayor que cualquier número entero negativo y menor que cualquier número entero positivo.
d) Cuanto mayor es el valor absoluto de un número entero negativo, menor es ese número.
e) Cuanto mayor es el valor absoluto de un número entero positivo, mayor es ese número.

9. Realizar las siguientes operaciones con números enteros
a) $(3 - 8) + [5 - (-2)] =$
b) $25 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5 =$
c) $9 : [6 : (- 2)] =$
d) $[(-2)^5 - (-3)^3]^2 =$
e) $(5 + 3 \cdot 2 : 6 - 4) \cdot (4 : 2 - 3 + 6) : (7 - 8 : 2 - 2)^2 =$
f) $[(17 - 15)^3 + (7 - 12)^2] : [(6 - 7) \cdot (12 - 23)] =$